Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 11 - 22 a 26 de Novembro de 2010

1. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1 \ , \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.

Sugestão: Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Uma vez determinada a função $u(t)$, mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geqslant \frac{1}{3\left(u(t)\right)^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \ ,$$

e integre esta relação entre 0 e t.

2. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1+y^2) \quad , \quad y(1) = 0 \tag{1}$$

(a) Determine a solução de (1) e indique o seu intervalo máximo de solução.

(b) Considere agora o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1+y^2)e^y \quad , \quad y(1) = 0$$

(i) Sem tentar resolver a equação, justifique que o problema tem localmente uma e uma só solução.

(ii) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é limitado superiormente, isto é, existe $\beta > 1$ tal que $\lim\limits_{t \to \beta^-} y(t) = \pm\infty$.

Sugestão: Começe por mostrar que a solução é uma função crescente para $t > 1$, e relacione com o problema (1).

3. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t + e^y).$$

(a) Justifique que a solução de qualquer problema de valor inicial $y(t_0) = y_0$ é única.

(b) Mostre que a solução do problema de valor inicial $y(0) = 0$ satisfaz $-t \leq y(t) \leq t$ para $t \geq 0$.

(c) Mais geralmente mostre que $|y(t) - y_0| \leq |t - t_0|$ para todo o t.

(d) Determine os intervalos máximos de definição das soluções desta equação.

4. Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de 0, $]-\alpha, \alpha[$ para algum $\alpha > 0$.

(b) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução do problema contém $[0, \infty[$ e determine $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$.

(c) Escreva uma equação integral que é equivalente ao P.V.I. para $y \in C^1(]-\alpha, \alpha[)$.

5. Majorando e minorando as seguintes equações, obtenha estimativas para os intervalos máximos de definição dos problemas de valor inicial indicados.

(a) $\frac{dy}{dt} = \arctan(ty), \quad y(0) = 2.$

(b) $\frac{dy}{dt} = \frac{e^{\cos(ty)}}{y^3}, y(0) = 1.$

(c) $\frac{dy}{dt} = y^2 e^y, \quad y(0) = -1$ (note que a função constante igual a 0 é uma solução da equação).

6. Determine a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ com,

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

7. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

8. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine $e^{\mathbf{A}t}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.