

# Análise Complexa e Equações Diferenciais

## Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 10 - 15 a 19 de Novembro de 2010

1. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0 \quad , \quad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

2. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + (y^3 - \log x) \frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

- a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma  $\mu = \mu(y)$  e determine-o.  
b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por  $\Phi(x, y) = C$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

- c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial  $y(1) = \sqrt{2}$ .

3. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

- a) Mostre que esta equação tem um factor integrante  $\mu = \mu(y)$ .  
b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial  $y(1) = 1$ .  
c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

4. Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \operatorname{sen}(t) + x' = 0 \tag{2}$$

Mostre que a equação não é exacta. Determine um factor integrante para a equação (2), e com ele a solução que satisfaz a condição inicial  $x(\pi) = 1$ . Indique o intervalo máximo de definição da solução obtida.

5. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2 \left( \frac{1}{x} + \log x \right) + 2y \log x \frac{dy}{dx} = 0 \\ y(e) = -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

6. Considere a equação diferencial ordinária

$$(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3)$$

- Mostre que (3) tem um factor integrante do tipo  $\mu = \mu(xy)$ .
- Mostre que a solução de (3) com condição inicial  $y(-1) = 1$  é dada implicitamente pela expressão  $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$ .
- Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto  $-1$ , da solução dada implicitamente na alínea anterior.

7. Calcule as primeiras iterações de Picard para o problema de Cauchy  $y' = t^2 + y^2$ , com  $y(0) = 0$ .

8. Mostre que existe uma solução de classe  $C^1$  para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

diferente da solução  $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

9. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y \frac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2 \end{cases},$$

- Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para  $t$  numa vizinhança de  $1/2$ .
- Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em  $\mathbb{R}$ .
- Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.