

# Análise Complexa e Equações Diferenciais

## Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 1 - 13 a 17 de Setembro de 2010

1. Escreva os seguintes números complexos na forma  $a + bi$  e represente-os geometricamente no plano de Argand:

a)  $(2 + i)(1 - i)$    b)  $\frac{1}{1-i}$    c)  $\frac{2+i}{1+i}$    d)  $(2 - 3i)^2$   
e)  $\overline{(1 - 2i)^3}$    f)  $i^{234}$    g)  $\frac{1}{i} + \frac{3}{1+i}$    h)  $(1 + \frac{3}{1+i})^2$

2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e represente-os geometricamente:

a) 3   b) -2   c)  $1 + i$    d)  $1 - i$    e)  $\sqrt{2}(1 + i)$   
f)  $\frac{1}{1-i}$    g)  $(1 - i)(-1 - i)$    h)  $\frac{(1+i)^2(1+\sqrt{3}i)^3}{(1-i)}$

3. Calcule os seguintes números complexos:

a)  $\sqrt[3]{i}$    b)  $\sqrt[4]{-1}$    c)  $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$    d)  $\sqrt{2 + 2\sqrt{3}i}$   
e)  $\sqrt[4]{(3 - \sqrt{3}i)^6}$    f)  $(\sqrt[4]{3 - \sqrt{3}i})^6$

4. Calcule, para  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

a)  $i^n$    b)  $(\frac{1-i}{1+i})^n$    c)  $(1 + i)^n + (1 - i)^n$

5. Esboce no plano complexo o conjunto dos números complexos que satisfazem as relações seguintes:

a)  $|z - 2| = 2$    b)  $|z + 2i| \geq 2$    c)  $1 < |z - i| < 3$   
d)  $|z - 3i| = |z + i|$    e)  $|z - 1| \geq |z - 1 - i|$    f)  $|z - 2| + |z + 2| = 5$   
g)  $|z - 1| - |z + 1| > 2$    h)  $|z| = \operatorname{Re}(z) + 2$    i)  $\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) < 1$   
j)  $\operatorname{Im}(\frac{z+i}{2i}) < 0$    k)  $\operatorname{Re}(\frac{z-1}{z-i}) = 0$    l)  $|z|^2 > z + \bar{z}$

6. Determine as soluções em  $\mathbb{C}$  das seguintes equações:

a)  $z^4 + 16i = 0$   
b)  $(1 - z)^6 = (1 + z)^6$

- c)  $1 - z + z^2 = 0$
- d)  $z\bar{z} - z + \bar{z} = 0$
- e)  $z^4 + z^2 = -1 - i$
- f)  $1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0$
- g)  $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 6i$
- h)  $z^6 = (i + 2)^3 + \frac{1-28i}{2-i}$
- i)  $1 + z + z^2 + \dots + z^7 = 0$

7. Utilize a fórmula de De Moivre para determinar expressões simplificadas das somas:

- a)  $\sum_{k=0}^n \text{sen}((3k+1)x) = \text{sen}(x) + \text{sen}(4x) + \text{sen}(7x) + \dots + \text{sen}((3n+1)x)$
- b)  $\sum_{k=0}^n \text{cos}((3k+1)x) = \text{cos}(x) + \text{cos}(4x) + \text{cos}(7x) + \dots + \text{cos}((3n+1)x)$

8. Determine todos os vértices de um polígono regular de  $n$  lados, centrado na origem, sabendo que um deles é representado pelo complexo  $z_1$ .

9. Sejam  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  três números complexos de módulo unitário satisfazendo  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ . Mostre que esses complexos são vértices de um triângulo equilátero.