Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2010/2011

Teste/Exame de Recuperação - Versão B

Cursos: LEIC-A, MEAer, MEMec, LEAN, MEEC

Justifique cuidadosamente as respostas apresentando todos os cálculos.

Data: 15 de Janeiro de 2011
Duração: Teste: 1h30 Exame: 3 h

1º Teste

1. Sejam β uma constante real e $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$v(x,y) = (\beta x)^2 - 2x + 2y^2 - 3\beta y^2.$$
[1.0] (a) Determine os valores de β para os quais v é a parte imaginária de uma função inteira f.
[1.0] (b) Para $\beta = 1$, determine a função inteira $f = u + iv$ que verifica $f(-i) = -i$. Calcule $f'(-i)$.
[1.0] (c) Sendo f a função determinada na alínea (b), calcule
$$\oint_{|z|=2} f(z)\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 dz.$$

2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{-\pi\} \to \mathbb{C}$, definida por
$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z+\pi)^3}.$$
[1.0] (a) Indique o desenvolvimento em série de Laurent em torno do ponto $z = -\pi$ indicando, justificadamente, a sua região de convergência.
[1.0] (b) Sendo g uma função inteira verificando $g'(-\pi) = 2i$, determine
$$\oint_{|z+\pi|=\frac{1}{2011}} f(z)g(z)\, dz.$$

3. Considere a função definida por
$$f(z) = \frac{e^{2z}-1}{(2z-i\pi)^2 \operatorname{sen}(iz)} - z^3 \cos\left(\frac{i}{z}\right).$$
[1.0] (a) Determine e classifique as singularidades de f.
[1.0] (b) Calcule o valor de
$$\oint_\gamma f(z)\, dz,$$
em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2011}\}$ é percorrida uma vez no sentido positivo.

[2.0] 4. Use o Teorema de Resíduos para obter o valor de
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 2}\, dx\,.$$

[1.0] 5. Sejam f e g funções inteiras tais que

- $|f(z)| \leq |g(z)|$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$;
- $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ existe qualquer que seja $z_0 \in \mathbb{C}$;

Mostre que existe uma constante $M \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = Mg(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2º Teste

[1.5] 6. Determine a solução do P.V.I.

$$(y + x^4 y)y' - 4x^3 = 0 \qquad , \qquad y(0) = 3$$

e indique o seu intervalo máximo de existência.

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

[1.5] (a) Determine e^{At}.

[1.5] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \qquad , \qquad \mathbf{y}\Big(-\frac{1}{2}\Big) = (0, e, 0)$$

em que $\mathbf{b}(t) = (0, 0, e^{-2t})$

8. Considere a equação diferencial

$$y'' + 2y' = f(t) \tag{1}$$

onde

$f(t) = 4\delta(t-2) + 8$ (**Para os Cursos**: MEMEC, MEAER, LEAN)

$f(t) = 5\,\mathrm{sen}\, t + 8t$ (**Para os Cursos**: MEEC, LEIC)

[0.5] (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada a (1).

[1.0] (b) Resolva a equação diferencial (1) com condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$.

[0.5] (c) Escreva a equação (1) na forma dum sistema equivalente de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

[1.0] 9. (a) Determine o desenvolvimento em série de cosenos da função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se} \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Estude a convergência pontual da série em $\mathbb{R}$.

[1.5] (b) Resolva o problema de valor inicial e valores na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 12(1+t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 2\pi \ , \ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 2\pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

[1.0] 10. Considere a constante real α e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \alpha \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ <u>todas</u> as soluções do sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ são limitadas, para $t \in \mathbb{R}^+$.