



Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2010/2011

Teste/Exame de Recuperação - Versão A

Cursos: LEIC-A, MEAer, MEMec, LEAN, MEEC

Justifique cuidadosamente as respostas apresentando todos os cálculos.

Data: 15 de Janeiro de 2011

Duração: Teste: 1h30 Exame: 3 h

1º Teste

1. Sejam α uma constante real e $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$v(x, y) = (\alpha y)^2 - 2y + 2x^2 - 3\alpha x^2.$$

[1.0] (a) Determine os valores de α para os quais v é a parte imaginária de uma função inteira f .

[1.0] (b) Para $\alpha = 2$, determine a função inteira $f = u + iv$ que verifica $f(i) = 2i$. Calcule $f'(i)$.

[1.0] (c) Sendo f a função determinada na alínea (b), calcule

$$\oint_{|z|=2} f(z) \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 dz.$$

2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{\pi\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}.$$

[1.0] (a) Indique o desenvolvimento em série de Laurent em torno do ponto $z = \pi$ indicando, justificadamente, a sua região de convergência.

[1.0] (b) Sendo h uma função inteira verificando $h'(\pi) = -i$, determine

$$\oint_{|z-\pi|=\frac{1}{2011}} f(z)h(z) dz.$$

3. Considere a função definida por

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{(4z + i\pi)^2 \operatorname{sen}(2iz)} + z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{i}{z}\right).$$

[1.0] (a) Determine e classifique as singularidades de f .

[1.0] (b) Calcule o valor de

$$\oint_{\gamma} f(z) dz,$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2011}\}$ é percorrida uma vez no sentido positivo.

[2.0] 4. Use o Teorema de Resíduos para obter o valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

[1.0] 5. Sejam f e g funções inteiras tais que

- $|f(z)| \leq |g(z)|$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$;
- $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ existe qualquer que seja $z_0 \in \mathbb{C}$;

Mostre que existe uma constante $M \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = Mg(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2º Teste

[1.5] 6. Determine a solução do P.V.I.

$$(y^2 + x^2 y^2) y' - 2x = 0 \quad , \quad y(0) = 2$$

e indique o seu intervalo máximo de existência.

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

[1.5] (a) Determine e^{At} .

[1.5] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad , \quad \mathbf{y}\left(\frac{1}{4}\right) = (1/e, 0, 0)$$

$$\text{em que } \mathbf{b}(t) = (0, e^{-4t}, 0)$$

8. Considere a equação diferencial

$$y'' - 3y' = f(t) \tag{1}$$

onde

$$f(t) = 3\delta(t-3) - 9 \quad (\text{Para os Cursos: MEMEC, MEAER, LEAN})$$

$$f(t) = 10 \cos t - 6t \quad (\text{Para os Cursos: MEEC, LEIC})$$

[0.5] (a) Determine a solução geral da equação homogênea associada a (1).

[1.0] (b) Resolva a equação diferencial (1) com condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$.

[0.5] (c) Escreva a equação (1) na forma dum sistema equivalente de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

[1.0] 9. (a) Determine o desenvolvimento em série de cossenos da função

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Estude a convergência pontual da série em \mathbb{R} .

[1.5] (b) Resolva o problema de valor inicial e valores na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 8(1+t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 2\pi \quad , \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 2\pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

[1.0] 10. Considere a constante real α e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \alpha \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ todas as soluções do sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ são limitadas, para $t \in \mathbb{R}^+$.