Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2010/2011

2º Teste - Versão A

(Cursos: LEIC-A, MEEC, MEMec, MEAer, LEAN)

18 de Dezembro de 2010

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Este caderno de exame inclui duas folhas em branco no final, que poderá utilizar como rascunho ou para terminar outras respostas. Todo o caderno é para ser entregue no final da prova, pelo que não poderá rasgar ou arrancar essas folhas.

Pergunta	cotação	classificação
1) a)	0,5	
1) b)	1,0	
1) c)	0,5	
2)	2,0	
3) a)	0,5	
3) b)	1,0	
3) c)	1,0	
4) a)	1,0	
4) b)	1,5	
5)	1,0	
Total	10	

Nome: ____

Nº: ___________________________ **Sala:** ____________

Curso: ________________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1. Considere a equação diferencial

$$\Big(\frac{e^{2x}\,\mathrm{sen}(x)}{2y} - y\Big) + (e^{2x}+1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

[0,5 val.] (a) Mostre que a equação não é exacta mas que admite o factor integrante $\mu(x,y) = 2ye^{-2x}$.

[1,0 val.] (b) Determine **na forma explícita** a solução da equação que verifica a condição inicial $y(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[0,5 val.] (c) Justifique que a solução do problema de valor inicial da alínea anterior é única, e determine o seu intervalo máximo de definição.

Resolução:

(a) Sejam $M(x,y) = \dfrac{e^{2x}\,\mathrm{sen}(x)}{2y} - y$ e $N(x,y) = e^{2x}+1$. Estas funççõs são de classe C^1 nas duas regiões simplesmente conexas $R_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ e $R_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$. Portanto existe uma funççāo $\Phi(x,t)$ definida em R_+ (respectivamente em R_-) tal que $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = N$ se e só se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ em } R_+ \text{ (resp. } R_-\text{)}.$$

Tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{e^{2x}\,\mathrm{sen}(x)}{2y^2} - 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2x}.$$

Portanto $\Phi(x,y)$ não existe, e a equação não é exacta. Usando a função $\mu(x,y) = 2ye^{-2x}$, obtém-se

$$\mu(x,y)\cdot M(x,y) = \mathrm{sen}(x) - 2y^2e^{-2x} \qquad \mu(x,y)\cdot N(x,y) = 2y(1+e^{-2x})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu\cdot M) = -4ye^{-2x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\mu\cdot N) = -4ye^{-2x}.$$

Logo $\mu(x,y)$ é um factor integrante da equação.

(b) No plano a equação $\mu M + \mu N y' = 0$ é exacta. Primitivando, a função $\mathrm{sen}(x) - 2y^2e^{-2x}$ na variável x, obtém-se

$$\Phi(x,y) = -\cos(x) + y^2e^{-2x} + f(y).$$

Como $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2ye^{-2x} + f'(y) = 2y(1+e^{-2x})$, segue-se $f'(y) = 2y$, e a solução da equação é dada implicitamente por $y^2\left(1+e^{-2x}\right) - \cos(x) =$ constante. Utilizando a condição inicial $(0, -\sqrt{2}/2)$, obtém-se

$$y^2\left(1+e^{-2x}\right) - \cos(x) = \frac{1}{2}(2) - 1$$

$$y = -\sqrt{\frac{\cos(x)}{1+e^{-2x}}}.$$

(c) A solução é dada implicitamente por $\Phi(x,y) = y^2\left(1+e^{-2x}\right) - \cos(x) = 0$. Ora, Φ é uma função de classe C^2. Quando $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0(1+e^{-2x_0}) \neq 0$, o teorema da Função Implicíta garante a existência de uma função única $\phi\colon U \to V$, em que $U = \{x \mid |x-x_0| < \alpha\}$ e $V = \{y \mid |y-y_0| < \beta\}$, tal que $\Phi(x,y) = 0$ para $(x,y) \in U \times V$ se e só se $y = \phi(x)$, e assim obtém-se uma solução única definida num aberto U que contém x_0. Segue-se que o intervalo máximo de definição da solução é $]-\pi/2, \pi/2[$.

Note-se que

$$y' = f(x,y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} / \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} / \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 .$$

Portanto a condição $2y_0(1+e^{-2x_0}) \neq 0$, ou seja $y_0 \neq 0$, também garante que $f(x,y)$ é contínua, e continuamente diferenciável na variável y, pelo que são válidas as hipóteses do teorema de Picard. Conclui-se que se $y_0 \neq 0$, o problema da valor inicial $y(x_0) = y_0$ tem uma solução única num intervalo aberto que contém x_0.

[2,0 val.] 2. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$$

com $x(-1) = 1$ e $y(-1) = 1$.

Resolução:

O sistema escreve-se na forma matricial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios da matriz A são obtidos pelos zeros do seu polinómio característico $\det(A - \lambda I) = 0$,

$$(2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0.$$

Portanto há apenas um valor próprio, $\lambda = 3$, com multiplicidade algébrica 2.

Procuramos agora os correspondentes vectores próprios através do sistema $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como tem que obrigatoriamente acontecer, as duas equações deste sistema são linearmente dependentes, de modo a existirem soluções não nulas. Os vectores próprios, neste caso, são dados então pela relação $v_1 = v_2$,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O espaço próprio tem portanto dimensão um, pelo que a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = 3$ é um. Faltam por isso vectores próprios - um, neste caso - para completar uma base de dois vectores próprios linearmente independentes, ambos necessariamente associados ao mesmo valor próprio $\lambda = 3$ repetido duas vezes. A matriz A não é, por isso, diagonalizável pelo que somos forçados a recorrer à forma canónica de Jordan e à correspondente exponencial matricial e^{At} para obter uma matriz solução fundamental.

Sabemos então, da álgebra linear, que

$$A = SJS^{-1} \qquad \text{e} \qquad e^{At} = Se^{Jt}S^{-1},$$

em que J é a forma canónica de Jordan associada à matriz A e S é uma correspondente matriz de mudança de base. Assim,

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

A matriz S de mudança de base terá um vector próprio na sua primeira coluna, sendo que a sua segunda coluna terá um vector próprio generalizado a determinar

$$S = \begin{bmatrix} 1 & w_1 \\ 1 & w_2 \end{bmatrix},$$

em que o vector próprio generalizado $\mathbf{w}$ da segunda coluna é dado pela equação $(A-\lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow w_2 = w_1 + 1.$$

Uma solução possível é fazer $w_1 = -1$ e $w_2 = 0$, a qual permite completar a matriz S,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e consequentemente} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Têm-se agora todos os ingredientes para calcular a exponencial matricial

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)e^{3t} & te^{3t} \\ -te^{3t} & (1+t)e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, a solução do problema de valor inicial é dada por $\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x_0}$ ou seja,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -te^{3(t+1)} & (t+1)e^{3(t+1)} \\ -(t+1)e^{3(t+1)} & (2+t)e^{3(t+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t+3} \\ e^{3t+3} \end{bmatrix}.$$

3. Considere a equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = h(t).$$

[0,5 val.] (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

[1,0 val.] (b) Sendo $h(t) = 4t + 6e^{2t}$ determine a solução da equação que verifica $y(0) = y'(0) = 0$.

[1,0 val.] (c) Determine a solução geral da equação para $h(t) = \frac{e^t}{\cos t}$.

Resolução:

(a) A equação homogénea é

$$(D^2 - 2D + 2)y = 0.$$

O polinómio característico é $P(R) = R^2 - 2R + 2$, e as suas raizes são $R = 1 \pm \mathrm{i}$. Assim, a solução geral da equação homogénea é:

$$y_H(t) = Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t.$$

(b) A equação

$$y'' - 2y' + 2y = h(t) = 4t + 6e^{2t} \tag{1}$$

pode ser resolvida pelo método dos coeficientes indeterminados.
O polinómio aniquilador de $h(t) = 4t + 6e^{2t}$ é $P_A(D) = D^2(D-2)$. Aplicando $P_A(D)$ a ambos os membros da equação (1):

$$D^2(D-2)(D-1-\mathrm{i})(D-1+\mathrm{i})y = D^2(D-2)\left(4t + 6e^{2t}\right) = 0 \tag{2}$$

As raizes do polinómio característico da equação homogénea (2) são $1 \pm \mathrm{i}$ (com multiplicidade 1 cada), 0 (com multiplicidade 2) e 2 (com multiplicidade 1). Consequentemente, a solução geral da equação (2) é:

$$y(t) = \underbrace{Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t}_{y_H(t)} + \underbrace{C + Dt + Ee^{2t}}_{y_P(t)}$$

Dado que $y_H(t)$ representa a solução geral da equação homogénea associada a (1), conclui-se que (1) tem uma solução particular da forma $y_P(t) = C + Dt + Ee^{2t}$. Substituindo y_P na equação diferencial obtém-se:

$$4Ee^{2t} - 2D - 4Ee^{2t} + 2C + 2Dt + 2Ee^{2t} = 4t + 6e^{2t},$$

ou seja

$$(2C - 2D) + 2Dt + 2Ee^{2t} = 4t + 6e^{2t},$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Desta forma, $C = D = 2$ e $E = 3$.
A solução geral da equação (1) é:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t + 2 + 2t + 3e^{2t}$$

Como $y'(t) = Ae^t \cos t - Ae^t \operatorname{sen} t + Be^t \operatorname{sen} t + Be^t \cos t + 2 + 6e^{2t}$, resulta que:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + 2 + 3 = 0 \\ A + B + 2 + 6 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -5 \\ B = -3 \end{array} \right.$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = -5e^t \cos t - 3e^t \operatorname{sen} t + 2 + 2t + 3e^{2t}$$

Alternativamente, poder-se-ia utilizar a transformada de Laplace para resolver o P.V.I.

(c) Para determinar uma solução particular da equação

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^t}{\cos t} \tag{3}$$

podemos utilizar a fórmula de variação das constantes.
Atendendo ao resultado da alínea (a), uma matriz wronskiana é dada por:

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \operatorname{sen} t \\ e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t & e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}$$

A sua inversa é, então:

$$W^{-1}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t - \cos t & \cos t \end{bmatrix}$$

Desta forma:

$$\begin{aligned}
y_P(t) &= \left[e^t \cos t \;\; e^t \operatorname{sen} t\right] \int^t e^{-s} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} s + \cos s & -\operatorname{sen} s \\ \operatorname{sen} s - \cos s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^s}{\cos s} \end{bmatrix} ds \\
&= \left[e^t \cos t \;\; e^t \operatorname{sen} t\right] \int^t \begin{bmatrix} -\frac{\operatorname{sen} s}{\cos s} \\ 1 \end{bmatrix} ds \\
&= \left[e^t \cos t \;\; e^t \operatorname{sen} t\right] \begin{bmatrix} \log|\cos t| \\ t \end{bmatrix} \\
&= e^t \cos t \, \log|\cos t| + te^t \operatorname{sen} t
\end{aligned}$$

A solução geral da equação (3) é, então:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t \, \log|\cos t| + te^t \operatorname{sen} t.$$

4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{se } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

[1,0 val.] (a) Determine a série de senos de $f(x)$, indicando os valores para os quais a série obtida converge, para cada $x \in \mathbb{R}$.

[1,5 val.] (b) Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < 2,\, t > 0) \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Resolução:

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 (1-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

Tem-se então que a série de senos da função f é

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$$

Por esta série ter sido obtida como a série de Fourier da extensão impar de $f(x)$ ao intervalo $[-2, 2]$, tem-se que para $x \in [-2, 2]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [-2,-1] \cup [1,2] \\ -x-1 & \text{se} \quad x \in]-1,0[\\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1-x & \text{se} \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

e para qualquer $x \in \mathbb{R}$ a soma da série iguala a extensão periódica (de período 4) desta função a $\mathbb{R}$.

(b) Pretende-se então encontrar a função $u(x,t)$ verificando o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t>0\ ,\ x\in]0,2[\\ u(0,t)=u(2,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=0 & x\in]0,2[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f(x) & x\in]0,2[\end{cases} \tag{4}$$

Começamos por notar que a função $f(x)$ não é a função identicamente nula pelo que a solução do problema (4) tambem não o será.

Dado que tanto a equação como as condições de fronteira são homogéneas, vamos utilizar o método de separação de variáveis para determinar soluções não nulas do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t>0\ ,\ x\in]0,2[\\ u(0,t)=u(2,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=0 & x\in]0,2[\end{cases} \tag{5}$$

da forma

$$u(x,t)=T(t)X(x)$$

O objectivo é encontrar $T(t)$ e $X(x)$ <u>não identicamente nulas</u>, tais que $u(x,t) = T(t)X(x)$ é uma solução de (5). Substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(T(t)X(x)\Big) = 9\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(T(t)X(x)\Big) \Leftrightarrow T''(t)X(x) = 9T(t)X''(x) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Observe-se que, separadas as variáveis, pretende-se que **para todos** $t>0$ e $x\in]0,2[$ uma função de t ($\frac{T''(t)}{9T(t)}$) iguale uma função de x ($\frac{X''(x)}{X(x)}$). Para que tal se verifique é necessário que ambos igualem uma constante, isto é, para $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\frac{T''(t)}{9T(t)}=\lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira e à condição inicial nula

- $u(0,t)=0$ implica $T(t)X(0)=0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(0)=0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u\equiv 0$) tem-se que $X(0)=0$.
- $u(2,t)=0$ implica $T(t)X(2)=0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(2)=0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X(2)=0$.
- $u(x,0)=0$ implica $T(0)X(x)=0$ e como tal ou $X(x)$ é a função identicamente nula ou $T(0)=0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u\equiv 0$) tem-se que $T(0)=0$.

Temos então dois problemas para resolver - correspondentes a duas equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{P1}) \ \begin{cases} X''-\lambda X=0 \\ X(0)=X(2)=0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{P2}) \ \begin{cases} T''=9\lambda T \\ T(0)=0 \end{cases}$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**, que é um problema de valores próprios. Assim:

$$X''-\lambda X=0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2-\lambda)X=0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, A, $B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ $(\lambda = \mu^2)$ — A equação é $(D-\mu)(D+\mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ $(\lambda = -\omega^2)$ — A equação é $(D + i\omega)(D - i\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

Os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, combinados com as condições de fronteira, produzem apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio de **(P1)**. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = 0 \\ X(2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad A\,\mathrm{sen}(\omega x) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\mathrm{sen}(2\omega) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}$$

Temos assim que $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{4}$ e $X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}$, para $n \in \mathbb{N}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de λ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T'' + \frac{9n^2\pi^2}{4}T = 0 \quad \Rightarrow \quad (D^2 + \frac{9n^2\pi^2}{4})T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = \alpha_n \,\mathrm{sen}\,\frac{3n\pi t}{2} + \beta_n \cos\frac{3n\pi t}{2}$$

Dado que $T(0) = 0$ tem-se que $\beta_n = 0$ e assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ a solução de **(P2)** é

$$T_n(t) = \mathrm{sen}\,\frac{3n\pi t}{2}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que as soluções (4) da forma $u(x,t) = T(t)X(x)$, que verificam condições de fronteira nulas e a condição inicial nula, são as funções da forma

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{3n\pi t}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Por sobreposição, a solução da equação diferencial que satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial nula será (formalmente):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{3n\pi t}{2}$$

Para determinar as constantes (β_n) utilizamos a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x)$. Resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\pi}{2}\beta_n \,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2} = f(x)$$

Pela alínea (a), para todo $x \in]0,2]$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}\Big)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}$$

pelo que se conclui que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\beta_n = \frac{2}{3n\pi}\Big(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\Big) = \frac{4}{3n^2\pi^2}\Big(1 - \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\Big)$$

Tem-se então que para $t > 0$ e $x \in]0,2[$ a solução de (4) é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3n^2\pi^2}\Big(1 - \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\Big)\operatorname{sen}\frac{3n\pi t}{2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}.$$

[1,0 val.] 5. Seja f uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$, periódica, de período $2L$. Mostre que os coeficientes a_n e b_n do desenvolvimento de f em série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) + b_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big),$$

satisfazem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Resolução:

Para $n \geq 1$ os coeficientes a_n da série de Fourier podem ser calculados, integrando por partes a fórmula habitual e usando a propriedade dada de diferenciabilidade da função f, através da expressão

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx = \frac{1}{n\pi}f(x)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big|_{-L}^{L} - \frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L} f'(x)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx.$$

O primeiro termo, da diferença de primitivas em L e $-L$, é nulo devido à periodicidade de $2L$ da função f e da função trigonométrica.

Os coeficientes a_n ficam assim apenas reduzidos ao integral final da expressão anterior, o qual pode ser estimado por

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L} f'(x)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx\right| \leq \frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L}\left|f'(x)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\right|dx \leq \frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L}\left|f'(x)\right|dx.$$

Mas $\int_{-L}^{L}|f'(x)|\,dx$ é simplesmente uma constante real, donde este último termo tende para zero quando $n \to \infty$ o que implica, pelas desigualdades anteriores, que também $|a_n| \to 0$.

Para os coeficientes b_n os cálculos e raciocínio são inteirmente iguais.