Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2010/2011

1º Teste - Versão A

(CURSOS: LEIC-A, MEEC, MEMEC, MEAER, LEAN)

6 de Novembro de 2010

Duração: 1h 30m

UMA RESOLUÇÃO

1. Seja $u(x,y) = 3\cos(x)\cosh(y) + \alpha(x)y - y^3$, em que $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$.

[1,0 val.] (a) Determine a forma geral de $\alpha(x)$ de modo a que u seja a parte real duma função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Resolução:

Como a função α é de classe $C^2(\mathbb{R})$, u é de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Sendo $\mathbb{R}^2$ um domínio simplesmente conexo, u é então a parte real duma função f holomorfa em todo o domínio $\mathbb{C}$ se e só se for harmónica, isto é, $\Delta u = 0$.

Mas

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha''(x)y - 6y,$$

donde a condição $\Delta u = 0$, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, é equivalente a

$$\alpha''(x) = 6,$$

a qual, primitivando duas vezes, dá

$$\alpha(x) = 3x^2 + Ax + B,$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, constantes arbitrárias reais.

[1,0 val.] (b) Considerando $\alpha(x) = 3x^2 + 2$, calcule $f'(\pi)$.

Resolução:

A derivada $f'(z)$, de $f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, é dada, em termos das derivadas parciais das suas partes real $u(x,y)$ e imaginária $v(x,y)$ por

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Observe-se que, pela segunda destas fórmulas, é possível calcular a derivada de f usando apenas a parte real $u(x,y)$, sem nunca ter de determinar o seu conjugado harmónico $v(x,y)$.

Então, usando $u(x,y) = 3\cos(x)\cosh(y) + (3x^2 + 2)y - y^3$ obtém-se

$$f'(x + \mathrm{i}y) = (-3\,\mathrm{sen}(x)\cosh(y) + 6xy) - \mathrm{i}(3\cos(x)\sinh(y) + 3x^2 + 2 - 3y^2),$$

e substituindo por $x = \pi$, $y = 0$

$$f'(\pi) = -\mathrm{i}(3\pi^2 + 2).$$

[0,5 val.] (c) Calcule o valor de $\oint_{|z|=2010} \frac{f(z)}{(z-\pi)^2}\,dz$, onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

Resolução:

Pela fórmula integral de Cauchy, visto que f é holomorfa em todo o plano complexo e que obviamente $z = \pi$ se encontra no interior da circunferência de raio 2010 centrada na origem, tem-se

$$\oint_{|z|=2010} \frac{f(z)}{(z-\pi)^2}\,dz = 2\pi \mathrm{i} f'(\pi).$$

Mas como nesta pergunta o integral é percorrido no sentido inverso, o integral pedido vale portanto

$$-2\pi \mathrm{i} f'(\pi) = -2\pi \mathrm{i}(-\mathrm{i}(3\pi^2+2)) = -6\pi^3 - 4\pi,$$

de acordo com a derivada calculada na alínea anterior.

2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)} + ze^{z^2}.$$

[1,0 val.] (a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno de $z_0 = 0$, indicando justificadamente qual o seu raio de convergência.

Resolução:

Usando a série geométrica obtém-se

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{se } |z| < 2.$$

Como $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ para $z \in \mathbb{C}$, segue-se que a série de Taylor de f em torno de $z_0 = 0$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{2n+1}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{4^{n+1}}\right) z^{2n+1},$$

e o raio da convergência é 2.

[0,5 val.] (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar

$$\oint_{|z|=1} \frac{f'''(z)}{z^4}\,dz.$$

Resolução:

Seja $g(z)$ uma função analítica em $\{z : |z| < 2\}$. Usando a fórmula integral de Cauchy tem-se $\oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^4} = \frac{2\pi i}{3!} g'''(0)$. Como $f'''(z)$ é uma função analítica em $\{z : |z| < 2\}$, obtém-se

$$\oint_{|z|=1} \frac{f'''(z)}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} f^{(3)}(z)\bigg|_{z=0} = \frac{2\pi i}{3!} f^{(6)}(0) = \frac{2\pi i}{3!} 6! \frac{-1}{2^7} = -i\pi \frac{15}{8}.$$

[1,0 val.] (c) Obtenha o valor do integral $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$, em que C é a curva parametrizada por $\gamma(t) = 3\cos(t^3) + \mathrm{i}\,2\,\mathrm{sen}(t^3)$, com $t \in [0, \sqrt[3]{3\pi/2}]$.

Resolução:
Considere o conjunto

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z = 2 + re^{i\theta} \text{ onde } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \text{ e } r > 0\}.$$

Para $z \in \Omega$, define-se $\mathrm{Log}(z-2) = \log r + i\theta$, em que $z = 2 + re^{i\theta}$. Assim obtém-se uma função analítica com $\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(z-2) = \frac{1}{z-2}$ e $C \subset \Omega$. Logo

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \left[\mathrm{Log}(z-2) + \frac{e^{z^2}}{2}\right]_{\gamma(0)}^{\gamma(\sqrt[3]{3\pi/2})} \\ &= \mathrm{Log}(-i2-2) + \frac{e^{-4}}{2} - \mathrm{Log}(3-2) - \frac{e^9}{2} \\ &= \frac{3}{2}\log 2 - \frac{e^9 - e^{-4}}{2} + i\frac{5\pi}{4}.\end{aligned}$$

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{\mathrm{sen}(3z)}{e^{-z} - 1} + \mathrm{sen}\left(\frac{2}{z-i}\right).$$

[1,0 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

Resolução:
Escrevemos $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, onde $f_1(z) = \frac{\mathrm{sen}(3z)}{e^{-z}-1}$ e $f_2(z) = \mathrm{sen}\left(\frac{2}{z-i}\right)$.
As singularidades de f_1 são todas as soluções da equação $e^{-z} - 1$, ou seja $z = 2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$. Note que f_2 é analítica em qualquer uma das singularidades de f_1, sendo que por isso f_2 não contribui para a parte principal da série de Laurent de f válida numa região do tipo $0 < |z - 2k\pi i| < \epsilon$.
No caso $k = 0$, ou seja, o da singularidade $z = 0$, $\mathrm{sen}\,3z$ também se anula. De facto, usando a regra de Cauchy,

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{sen}(3z)}{e^{-z}-1} = \lim_{z\to 0}\frac{3\cos(3z)}{-e^{-z}} = -3,$$

pelo que $z = 0$ é singularidade removível de f_1 e de f e

$$\mathrm{R}es(f, 0) = \mathrm{R}es(f_1, 0) = 0$$

Em alternativa, para classificar a singularidade 0, podemos utilizar as séries de MacLaurin das funções $\mathrm{sen}(3z)$ e e^{-z}. Assim, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e todo $0 < |z| < \epsilon$

$$f_1(z) = \frac{(3z) - \frac{(3z)^3}{3!} + \frac{(3z)^5}{5!} - \ldots}{1 - z + \frac{z^2}{2|} - \frac{z^3}{3|} + \ldots - 1} = \frac{(3z)\left(1 - \frac{(3z)^2}{3!} + \frac{(3z)^4}{5!} - \ldots\right)}{z\left(-1 + \frac{z}{2|} - \frac{z^2}{3|} + \ldots\right)} \equiv z^0\,G(z)$$

Atendendo a que a a função G é analítica em 0 (dado que é um quociente de séries de potências convergentes em $|z| < \epsilon$) e $G(0) = -3 \neq 0$, conclui-se que 0 é uma singularidade removível de f_1 (e de f), e como tal Res$(g, 0) = 0$.
No caso $k \neq 0$, temos que (usando também a regra de Cauchy):

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2k\pi i}(z-2k\pi i)\frac{\operatorname{sen}(3z)}{e^{-z}-1} &= \operatorname{sen}(6k\pi i)\lim_{z\to 2k\pi i}\frac{z-2k\pi i}{e^{-z}-1} \\
&= -i\operatorname{senh}(6k\pi)\lim_{z\to 2k\pi i}\frac{1}{-e^{-z}} \\
&= i\frac{\operatorname{senh}(6k\pi)}{-e^{-2k\pi i}} = i\operatorname{senh}(6k\pi)
\end{aligned}$$

Assim, $z = 2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ são polos simples de f e

$$\mathrm{R}es(f, 2k\pi i) = \mathrm{R}es(f_1, 2k\pi i) = \lim_{z\to 2k\pi i}(z-2k\pi i)\frac{\operatorname{sen}(3z)}{e^{-z}-1} = i\operatorname{senh}(6k\pi)$$

No que diz respeito à função f_2, ela tem apenas a singularidade $z = i$, sendo que f_1 é analítica em i. Desenvolvendo f_2 em série de Laurent em torno de i (basta usar a série de Taylor da função seno em potências de $w = \frac{2}{z-i}$), obtém-se:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\frac{1}{(z-i)^{2n+1}} = \frac{2}{z-i} - \frac{2^3}{3!(z-i)^3} + \frac{2^5}{5!(z-i)^5} + \cdots$$

(válida para $|z - i| > 0$). Conclui-se então que $z = i$ é singularidade essencial de f_2 e de f e que, recorrendo à série acima e à definição de resíduo:

$$\mathrm{R}es(f, i) = \mathrm{R}es(f_1, i) = a_{-1} = 2$$

[1,0 val.] (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar

$$\oint_{|z-\pi \mathrm{i}|=\frac{2011}{2010}\pi} f(z)\,dz.$$

Resolução:
As singularidades de f contidas no interior da curva são $z = 0$, $z = i$ e $z = 2\pi i$. As restantes singularidades de f, que são $z = 2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, estão a uma distância de πi maior ou igual a 3π e, por isso, pertencem à região exterior à curva $|z - \pi i| = \frac{2011}{2010}\pi$. Pelo teorema dos resíduos:

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-\pi \mathrm{i}|=\frac{2011}{2010}\pi} f(z)\,dz &= 2\pi i\Big(\mathrm{R}es(f,0) + \mathrm{R}es(f,i) + \mathrm{R}es(f,2\pi i)\Big) \\
&= 2\pi i(2 + i\operatorname{senh}6\pi) = \pi(e^{-6\pi} - e^{6\pi} + 4i)
\end{aligned}$$

[2,0 val.] 4. Utilizando o teorema dos resíduos, determine o valor do integral

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

Resolução:

Seja:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}.$$

Consideremos o caminho fechado e simples $C_R = I_R + \Gamma_R$, onde Γ_R é a semicircunferência $|z| = R, \ \operatorname{Im} z \geq 0$ percorrida no sentido directo e I_R é segmento do eixo real que une $-R$ a R.

As singularidades de f são as soluções de $z^2 + 4 = 0$, ou seja, $z = \pm 2i$. Note que são ambas zeros de ordem 2 de $(z^2+4)^2$, pelo que são polos de ordem 2 de $f(z)$

Com R suficientemente grande (basta $R > |2+i| = \sqrt{5}$), a única singularidade de f no interior de C_R é $z = 2i$. Desta forma, pelo teorema dos resíduos:

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i).$$

Como $2i$ é um zero de ordem 2 de $(z^2+4)^2$, a singularidade $z = 2i$ deverá ser um é polo de ordem 2 de f. De facto,

$$\lim_{z\to 2i} (z-2i)^2 f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z+2i)^2} = -\frac{1}{4} \neq 0,$$

pelo que $z = 2i$ é um polo de ordem 2 de f e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f,2i) &= \lim_{z\to 2i} \left(\frac{d}{dz} \Big[(z-2i)^2 f(z) \Big] \right) = \lim_{z\to 2i} \left(\frac{d}{dz} \frac{1}{(z+2i)^2} \right) \\ &= \lim_{z\to 2i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = -\frac{2}{(4i)^3} = \frac{1}{32i} \end{aligned}$$

Assim:

$$\int_{I_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = 2\pi i \, \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16} \qquad (1)$$

Por outro lado, na curva $|z| = R$ (e para $R > 2$):

$$\left| \frac{1}{(z^2+4)^2} \right| \leq \frac{1}{\big| |z^2| - 4 \big|^2} = \frac{1}{(R^2-4)^2}$$

Assim:

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} \right| \leq \int_{\Gamma_R} \left| \frac{1}{(z^2-4)^2} \right| |dz| \leq \frac{1}{(R^2-4)^2} \int_{\Gamma_R} |dz| = \frac{\pi R}{(R^2-4)^2} \to 0$$

quando $R \to \infty$. Logo:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = 0.$$

Alternativamente, pode justificar o resultado acima atendendo que $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinómios tais que Grau $Q(z)$ $-$ Grau $P(z) = 4 - 0 \geq 2$.

Tomando agora o limite quando $R \to \infty$ na igualdade (1), obtém-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

Como $f(x) = \frac{1}{(x^2+4)^2}$ é uma função par, resulta que:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{32}.$$

[1,0 val.] 5. Seja f uma função holomorfa na região $0 < |z - z_0| < R$, para algum $R > 0$. Mostre que, se f é limitada nessa região - ou seja, se existe um $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para todos os pontos z nessa região - então z_0 é uma singularidade removível de f.

Resolução:

Pelo teorema de Laurent, a função f admite um desenvolvimento em série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad para \quad 0 < |z - z_0| < R, \tag{2}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

com $\epsilon \in]0, R[$. Sendo M um majorante de $|f(z)|$ na região $0 < |z - z_0| < R$, para $n < 0$ e qualquer $\epsilon \in]0, R[$:

$$|a_n| \leq \oint_{|z-z_0|=\epsilon} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \right| |dz| \leq \oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{M}{\epsilon^{n+1}} |dz| = \frac{M}{\epsilon^{n+1}} 2\pi\epsilon = M\epsilon^{-n};$$

como $\lim\limits_{\epsilon \to 0} M\epsilon^{-n} = 0$, concluímos que $a_n = 0$, para qualquer inteiro negativo n ou seja, a parte principal da série (2) é nula. Assim sendo, a singularidade z_0 é removível.

Resolução alternativa:

Vejamos em primeiro lugar que existe e é nulo o limite:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Sendo M um majorante de $|f(z)|$ na região $0 < |z - z_0| < R$,

$$|(z - z_0) f(z)| = |z - z_0|\,|f(z)| \leq M|z - z_0| \quad \text{para} \;\; 0 < |z - z_0| < R.$$

Dado que $\lim\limits_{z \to z_0} M|z - z_0| = 0$ usando a desigualdade anterior podemos concluir que

$$\lim_{z \to z_0} |(z - z_0) f(z)| = 0$$

o que implica que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \;\; .$$

Assim, z_0 é uma singularidade removível da função $\varphi(z) = (z - z_0) f(z)$ donde (e atendendo a que φ é analítica na região $0 < |z - z_0| < R$):

$$(z - z_0) f(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots + b_n(z - z_0)^n + \cdots \qquad \text{para} \quad 0 < |z - z_0| < R.$$

Note que $b_0 = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$, pelo que

$$(z - z_0) f(z) = b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots + b_n(z - z_0)^n + \cdots$$

ou seja

$$f(z) = b_1 + b_2(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n + \cdots$$

(na região $0 < |z - z_0| < R$). Desta forma, z_0 é singularidade removível.