Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2010/2011

1º Teste - Versão A

(CURSOS: LEIC-A, MEEC, MEMEC, MEAER, LEAN)

6 de Novembro de 2010

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Este caderno de exame inclui duas folhas em branco no final, que poderá utilizar como rascunho ou para terminar outras respostas. Todo o caderno é para ser entregue no final da prova, pelo que não poderá rasgar ou arrancar essas folhas.

Pergunta	cotação	classificação
1) a)	1,0	
1) b)	1,0	
1) c)	0,5	
2) a)	1,0	
2) b)	0,5	
2) c)	1,0	
3) a)	1,0	
3) b)	1,0	
4)	2,0	
5)	1,0	
Total	10	

Nome: ____

Nº: ______________________ **Sala:** __________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1. Seja $u(x,y) = 3\cos(x)\cosh(y) + \alpha(x)y - y^3$, em que $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$.

[1,0 val.] (a) Determine a forma geral de $\alpha(x)$ de modo a que u seja a parte real duma função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

[1,0 val.] (b) Considerando $\alpha(x) = 3x^2 + 2$, calcule $f'(\pi)$.

[0,5 val.] (c) Calcule o valor de $\displaystyle\oint_{|z|=2010} \frac{f(z)}{(z-\pi)^2}\,dz$, onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)} + ze^{z^2}.$$

[1,0 val.] (a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno de $z_0 = 0$, indicando justificadamente qual o seu raio de convergência.

[0,5 val.] (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar

$$\oint_{|z|=1} \frac{f'''(z)}{z^4}\,dz.$$

[1,0 val.] (c) Obtenha o valor do integral $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$, em que C é a curva parametrizada por $\gamma(t) = 3\cos(t^3) + \mathrm{i}\,2\,\mathrm{sen}(t^3)$, com $t \in [0, \sqrt[3]{3\pi/2}]$.

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{\mathrm{sen}(3z)}{e^{-z} - 1} + \mathrm{sen}\left(\frac{2}{z-i}\right).$$

[1,0 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar

$$\oint_{|z-\pi\mathrm{i}|=\frac{2011}{2010}\pi} f(z)\,dz.$$

[2,0 val.] 4. Utilizando o teorema dos resíduos, determine o valor do integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

[1,0 val.] 5. Seja f uma função holomorfa na região $0 < |z - z_0| < R$, para algum $R > 0$. Mostre que, se f é limitada nessa região - ou seja, se existe um $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para todos os pontos z nessa região - então z_0 é uma singularidade removível de f.