Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 9 - 16 a 20 de Novembro de 2020

1. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0 \qquad , \qquad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

2. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

3. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

4. Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \operatorname{sen}(t) + x' = 0 \tag{2}$$

Mostre que a equação não é exacta. Determine um factor integrante para a equação (2), e com ele a solução que satisfaz a condição inicial $x(\pi) = 1$. Indique o intervalo máximo de definição da solução obtida.

5. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2\left(\dfrac{1}{x}+\log x\right)+2y\log x\dfrac{dy}{dx} & = \ 0 \\ \\ y(e) \ = \ -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

6. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)+\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)\frac{dy}{dx}=0 \tag{3}$$

a) Mostre que (3) tem um factor integrante do tipo $\mu=\mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (3) com condição inicial $y(-1)=1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4=1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.