Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semanas 7 - 2 a 6 de Novembro de 2020

1. Determine a série de Laurent da função $f(z)$ na vizinhança do ponto z_0, isto é, válida em $0 < |z - z_0| < R$, indicando o valor de R em cada caso.

   a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}, \quad z_0 = 0$ b) $f(z) = z^3 e^{1/z}, \quad z_0 = 0$

   c) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}, \quad z_0 = 0$ d) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z - 2}, \quad z_0 = 2$

2. Para cada função e região indicada, determine as séries de Laurent respectivas:

   a) $\dfrac{1}{z-1}$, $|z| > 1$.

   b) $z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z\right)$, $|z| > 0$.

   c) $\dfrac{1}{(z-2)(z-i)}$, $1 < |z| < 2$.

   d) $\dfrac{1}{(z-2)(z-i)}$, $|z| > 2$.

   e) $\dfrac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z - i| > 1$.

   f) $\left(3z^2 - 1\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi z^3 + z}{z^3}\right)$, $|z| > 0$.

3. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ nas seguintes regiões:

   (a) $0 < |z - i| < 2$.

   (b) $2 < |z - i|$.

   e calcule os seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz$.

   (b) $\displaystyle\oint_{|z-i|=3} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz$.

4. Seja $P(z)$ um polinómio e γ uma curva simples e fechada em $\mathbb{C}$, percorrida uma vez no sentido directo, e que não intersecta o conjunto dos zeros de $P(z)$. Mostre que o valor de

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz$$

é igual ao número de zeros (contando multiplicidades) de $P(z)$ que pertencem ao interior da curva γ.

5. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções, e calcule os resíduos correspondentes.

   a) $f_1(z) = \dfrac{1-\cos z}{z-\pi}$

   b) $f_2(z) = \dfrac{z}{(z^2+2)^2}$

   c) $f_3(z) = \dfrac{1}{z^7(1-z^2)}$

   d) $f_4(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4(1-z^2)}$

   e) $f_5(z) = z^2 \exp \dfrac{1}{z}$

6. Mostre que o resíduo da função

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z},$$

em $z_0 = 0$ é igual a $e - 1$.

7. Considere a função

$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{z}}.$$

Mostre que $g(z)$ não possui uma singularidade isolada em $z = 0$.

8. Seja f uma função analítica no ponto z_0. Mostre que a função $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ possui em z_0 uma singularidade removível, caso $f(z_0) = 0$, e um pólo simples de resíduo $f(z_0)$, em caso contrário.

9. Suponha que $f(z) = h(z)/g(z)$ tem um pólo de ordem 1 em $z = z_0$, sendo h e g analíticas em z_0 e $h(z_0) \neq 0$. Mostre que

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.$$

10. Considere as curvas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2\pi i| = 1\}$, percorridas uma vez no sentido directo. Calcule o valor dos integrais

$$\oint_{\gamma_k} g(z)dz,$$

para cada uma das seguintes funções complexas:

(i) $g(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$, (ii) $g(z) = z^2 \operatorname{sen}(z^{-1})$, (iii) $g(z) = \dfrac{z-2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2}$.

11. Utilize o teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais no plano complexo, em que as curvas de Jordan indicadas são percorridas uma vez no sentido positivo

   a) $\displaystyle\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\text{sen}\, z}{z^2-1}\, dz$

   b) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\text{sen}\, z}{z^2(\pi-z)}\, dz$

   c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z-1}{z^3}\, dz$

12. Calcule o seguinte integral
$$\oint_C \left(\frac{z^2}{\text{sen}\,(\pi z)} + z^2\text{sen}\,\frac{1}{(z-1)^2}\right) dz,$$
onde C é a elipse $|z-1|+|z+1|=3$, percorrida uma vez no sentido positivo.

13. Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, mediante a escolha de um contorno de integração adequado, estabeleça os seguintes resultados:

   a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\text{sen}^2\theta} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$

   Sugestão: mostre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5-4\cos(2\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2}\text{Re}\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{i6\theta}}{5-4\cos(2\theta)}\, d\theta$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\, dx = \frac{(3-\sqrt{3})\pi}{6}$

   d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^4+4)}\, dx = \frac{\pi}{12}$

   e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3}$

   f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\text{sen}\, x}{(x^2+1)}\, dx = \frac{\pi}{e}$

   g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)}\, dx = \frac{\pi}{2e}$

14. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto $A=\mathbb{C}-\{z_1,\ldots,z_n\}$. Observe que a função $F(z)=\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ possui uma singularidade isolada em $z=0$. Define-se o **resíduo de f em** ∞ por:
$$\text{Res}(\text{f},\infty) = -\text{Res}(\text{F(z)},0).$$
Mostre que se $\gamma\subset A$ é uma curva simples, fechada, percorrida no sentido directo, que contém os pontos $\{z_1,\ldots,z_n\}$ no seu interior, então:
$$\int_\gamma f(z)\, dz = -2\pi i\ \text{Res}(\text{f},\infty).$$