Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semanas 6 - 26 a 30 de Outubro de 2020

1. Escreva uma expressão da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ para as seguintes funções:

   a) $\frac{1}{2z+5}$ b) $\frac{1}{z^4+1}$ c) $\frac{1+iz}{1-iz}$ d) $\frac{1}{1-z+z^2}$
   e) $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ f) $\frac{1}{(z^2-1)(z^2-9)}$

   Em cada caso, indique o conjunto onde a expressão obtida é válida.

2. Determine a região de convergência das seguintes séries de potências:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-i\sqrt{2}\right)^n}{n^4+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n!)^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z+1-i)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z+1)^n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$

3. A **função ζ de Riemann** é definida pela fórmula:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

   Mostre que esta série é absolutamente convergente para $\mathrm{Re}(z) > 1$ e uniformemente convergente para $\mathrm{Re}(z) \geq c$, para qualquer $c > 1$.

4. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência R, quais os raios de convergência das séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^5 z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+3}$?

5. Determine a região de convergência e calcule a soma das seguintes séries de potências:

$$\text{a) } \sum_{n=4}^{\infty} (\alpha z)^{3n}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} n z^{2n+1}, \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

6. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos pontos indicados, bem como as respectivas regiões de convergência:

   a) $\frac{1}{1-z}$, em torno de $z = 3$.
   b) $e^{5z} + \frac{3}{3+5z}$, em torno de $z = 2$.
   c) $\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.
   d) e^{2z} , em torno de $z = i\pi$.

e) z^2e^z , em torno de $z = 1$.

f) Valor principal de $\log z$, em torno de $z = i - 1$.

7. Considere a função $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}$. Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $(z - 2)$.