Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 5 - 19 a 23 de Outubro de 2020

1. Determine se as seguintes funções são primitiváveis no domínio indicado e em caso afirmativo determine uma primitiva.

   a) z^2e^z em $\mathbb{C}$ b) $\dfrac{\cos z}{z}$ em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ c) $\dfrac{1}{z(z-1)}$ em $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

   d) $\dfrac{1}{z(z-1)}$ em $\mathbb{C}\setminus\{x+0i : 0\leq x\leq 1\}$ e) $f(x+iy)=3y+x^2-y^2+i(2xy-3x)$ em $\mathbb{C}$

2. Seja f holomorfa numa aberto A e γ um caminho fechado em A. Mostre que, para todo o z_0 que não está sobre a curva percorrida por γ se tem

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

   Obs: O caminho não é necessariamente homotópico a um ponto em A nem $z_0\in A$.

3. Determine todos os possíveis valores do integral

$$\oint_C \frac{z\cos z}{z^2+1}\,dz,$$

   onde C é uma qualquer curva de Jordan, seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$.

4. Para $a\in\mathbb{C}$ e $r>0$, designe-se por $\gamma(a,r)$ o caminho $\gamma(t)=a+re^{it}$, ($t\in[0,2\pi]$). Calcule $\displaystyle\oint_{\gamma(a,r)}(z^2+1)^{-1}dz$ para:

   a) $\gamma(1,1)$ b) $\gamma(i,1)$ c) $\gamma(-i,1)$ d) $\gamma(0,2)$ e) $\gamma(3i,\pi)$

5. Calcule o seguinte integral

$$\oint_{|z+i|=2}\frac{z^3+e^z}{z^2+z-2}\,dz,$$

   em que a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

6. Seja $\Gamma\subset\mathbb{C}$ a elipse $|z-\pi i|+|z-2\pi i|=\frac{7\pi}{2}$, percorrida no sentido positivo. Calcule

   a) $\displaystyle\oint_\Gamma z^3\cosh z\,dz$ b) $\displaystyle\oint_\Gamma e^{\cos^3 z}\,dz$ c) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{ze^{-z}}{z-\frac{i}{2}}\,dz$ d) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{1}{z^2+\pi^2}\,dz$

   e) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-\pi i)}dz$ f) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2(z-2\pi i)^3}$ g) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z-i\pi)^{11}}\,dz$

7. Usando o valor do integral $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$, prove que

$$\int_0^{\pi} e^{\cos\theta} \cos(\operatorname{sen}\theta) d\theta = \pi.$$

8. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i\left(x^2 - y^2 + 2xy - 2x\right).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, dz,$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

9. Poderá existir uma função analítica em $\mathbb{C}$ cuja parte real seja $u(x, y) = e^{-y}x + e^x y$?

10. Decida se existem, ou não, funções analíticas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes condiçoes, e em caso afirmativo determine-as:

    a) $\mathrm{Re} f(x + iy) + \mathrm{Im} f(x + iy) = x^2 - y^2$.

    b) $\mathrm{Im} f(x + iy) = 3x^3 y + x + \alpha x y^3$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e satisfazendo $f(i) = 2$.

11. Determine funções harmónicas conjugadas para as seguintes funções:

    a) $u(x, y) = x^2 + xy - y^2$;

    b) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$;

    c) $u(x, y) = e^{-y}(x \cos x - y \operatorname{sen} x)$;

    d) $u(x, y) = \log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + 2y$.

12. Sejam α, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções diferenciáveis, e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$f(x + iy) = \alpha(x) - 3xy^2 + i(3x^2 y + \beta(y))$$

para $x, y \in \mathbb{R}$. Decida se pode ou não escolher α, β de modo a que f seja uma função inteira. Em caso afirmativo, determine α, β de maneira a $f(1) = i$.

13. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

    a) Mostre que u é uma função harmónica.

    b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0, 0) = 0$.

    c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz \qquad \text{e} \qquad \oint_C \frac{f(z)}{z^3}\, dz$$

    onde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

14. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x,y) = \mathrm{Re}\,[g(x+iy)]$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}\,[g(x+iy)]$.

    a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g?

    b) Mostre que u é uma função harmónica.

    c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $\mathrm{Re}\,(f) = u$.

15. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira tal que existe um $M > 0$ para o qual $|f(z)| \geq M$, para todo o $z \in C$. Prove que então f é constante.

16. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira, tal que existem $M, R > 0$ e um inteiro $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|f(z)| \leq M|z|^n$, para $|z| > R$. Mostre que então f é um polinómio de grau $\leq n$.
    Obs: Este resultado mostra que funções inteiras, não polinomiais, têm necessariamente de crescer em módulo mais rapidamente que qualquer polinómio, quando $z \to \infty$. Como se justifica esta afirmação, por exemplo, no caso da função inteira (e não polinomial) $\cos z$?