Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 4 - 12 a 16 de Outubro de 2020

1. Mostre que $f(z) = \sqrt{|xy|}$ possui, na origem, derivadas parciais que verificam as equações de Cauchy-Riemann, mas que f não possui derivada (no sentido complexo) nesse ponto. Porque é que isso não contradiz o Teorema de Cauchy-Riemann?

2. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (|z|^2 - 2)\bar{z}$.

   a) Determine o subconjunto de $\mathbb{C}$ onde f é diferenciável, bem como o seu domínio de analiticidade.

   b) Mostre que f transforma circunferências centradas na origem e de raio r em circunferências centradas na origem de raio r'. Para que valores de r se tem $r = r'$?

3. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que se verifica uma das condições

   a) $\mathrm{Re}(f)(z) \equiv$ (constante),

   b) $f'(z) \equiv 0$,

   c) $|f(z)| \equiv$ (constante).

   Mostre que então $f(z) \equiv$ (constante).

4. Mostre que se f e $\overline{f}$ são ambas inteiras (i.e. diferenciáveis em todo o $\mathbb{C}$), então f é constante.

5. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e defina $A^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}$. Se f é uma função analítica em A mostre que $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é uma função analítica em A^*.

6. Seja $f : A \to B$, com $A, B \subset \mathbb{C}$ abertos, uma função diferenciável, no sentido $\mathbb{R}^2$, no ponto $z_0 \in A$. Sabendo que, para $z = x + iy$, se tem $x = (z + \bar{z})/2$ e $y = (z - \bar{z})/2i$, podemos interpretar $f(x, y)$ como uma função de z e $\bar{z}$. Defina

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

   a) Considere caminhos regulares $\alpha(t)$ em A, com $\alpha(0) = z_0$ e os correspondentes caminhos transformados $\beta(t) = f(\alpha(t))$. Prove a fórmula

$$\beta'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,\alpha'(0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\,\overline{\alpha'(0)}.$$

b) Mostre que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em z_0 se e só se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Nota: este exercício mostra que as funções holomorfas são, neste sentido, aquelas que não dependem de $\bar{z}$.

c) Conclua que, se f for conforme em z_0, então são válidas as equações de Cauchy-Riemann e portanto f é diferenciável complexa em z_0, com $f'(z_0) \neq 0$.

7. Determine, pela definição, os valores dos seguintes integrais:

   a) $\int_C |z|\, dz$ em que C é a semicircunferência centrada na origem, percorrida em sentido directo, unindo $-2i$ a $2i$.
   b) $\int_C \bar{z}\, dz$ em que C é o segmento de recta unindo 1 a $2+3i$.
   c) $\int_C z\cos z^2 dz$ em que C é o segmento de recta unindo 0 a πi.

8. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

   a) Calcule, utilizando a definição, $\int_{\gamma_k} e^z dz$, com $k = 1, 2$.
   b) Calcule $\int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$ com $k = 1, 2$.
   c) Comente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.

9. Calcule o integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}}\, dz$, onde γ é percorrida no sentido positivo e

   a) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ , } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, e escolha-se o ramo da função $\sqrt{z}$ que verifica $\sqrt{1} = 1$,
   b) $\gamma = \{z \in C : |z| = 1 \text{ , } \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$, e escolha-se o ramo da função $\sqrt{z}$ que verifica $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$.

10. Seja

$$f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z] \quad , \quad |z| > 0 \text{ e } 0 \leq \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$$

Calcule

$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida no sentido positivo.

11. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\left| \int_\gamma \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \pi \frac{R(2R^2+1)}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

12. Considere o caminho $z : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, definido por $z(\theta) = e^{-\theta + i\theta}$, que representa parametricamente a curva γ. Considere ainda $\alpha := \int_\gamma z\, dz$.

a) Esboce γ.

b) Calcule α usando a definição.

c) Calcule α usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

d) Calcule α usando o Teorema de Cauchy para substituir γ por um segmento de recta.

13. Seja γ uma curva fechada simples com orientação positiva. Usando o Teorema de Green, mostre que a área no interior de γ pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}\,dz.$$