Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 3 - 6 a 9 de Outubro de 2020

1. Para cada um dos seguintes conjuntos, determine se é aberto, fechado, limitado e compacto. Além disso, indique o interior, exterior, fronteira e aderência.

   a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
   b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2\}$
   c) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$
   d) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$
   e) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 3\}$
   f) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$
   g) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\} \cup \{0\}$
   h) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 2\}$
   i) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0,\ 1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2\}$
   j) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0,\ 1 \leq \mathrm{Im}(z) < 2\}$
   k) $\{z \in \mathbb{C} : z = p + iq,\ p, q \in \mathbb{Q}\}$
   l) $\{z \in \mathbb{C} : z = e^{2\pi i r n},\ n \in \mathbb{Z}\}$ $\quad r \in \mathbb{Q}$ fixo
   m) $\{z \in \mathbb{C} : z = e^{2\pi i s n},\ n \in \mathbb{Z}\}$ $\quad s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fixo

2. Calcule os seguintes limites ou mostre que não existem

   a) $\lim \frac{n+2i}{7+3ni}$ b) $\lim \frac{\mathrm{senh}\,(ni)}{n}$ c) $\lim e^{in}$ d) $\lim (1+i)^{-n}$

   e) $\lim_{z\to -i} \frac{z^2+3iz-2}{z+i}$ f) $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, z}{z}$ g) $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, z}{\mathrm{senh}\,(iz)}$ h) $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$

3. Ao longo de que semi-rectas começando na origem (identificadas por $\mathrm{Arg}(z) = \text{const.}$), existe o limite $\lim_{z\to\infty} |e^z|$?

4. Para que valores de z é convergente a sucessão nz^n?

5. Mostre que, se $|z| > 1$ então $\lim \dfrac{z^n}{n} = \infty$.

6. Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa e indique os pontos de $\mathbb{C}$ onde são contínuas:

   a) $\mathrm{Re}(z)$ b) $\overline{z}$ c) $|z|$ d) z^2 e) $z|z|$

   f) $e^{\cos z}$ g) $\log(z+2)$ (Ramo Principal) h) $\frac{1}{(3-5z)^3}$ i) $\frac{1+z}{(\mathrm{sen}\, z)^2}$

7. Mostre que, se f é contínua em $z_0 \in D_f$ e $f(z_0) \neq 0$, então existe uma bola centrada em z_0 tal que $f(z) \neq 0$ para todos os pontos $z \in D_f$ nessa bola.

8. Seja $f : D_f \to \mathbb{C}$. Mostre que f é contínua no seu domínio D_f se e só se, qualquer que seja o aberto $A \subset \mathbb{C}$, existe um aberto O tal que $f^{-1}(A) = O \cap D_f$.

9. Seja $f : D_f \to \mathbb{C}$ e $K \subset D_f$ um subconjunto compacto. Mostre que, se f é contínua em D_f, então $f(K)$ é compacto.

10. Considere a esfera de Riemann dada por $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ e a correspondente projecção estereográfica sobre o plano complexo, que a cada ponto $(x_1, x_2, x_3) \in S$, exceptuando o pólo norte $(0, 0, 1)$, faz corresponder um ponto do plano $z \in \mathbb{C}$. Mostre que a correspondência entre z e (x_1, x_2, x_3) é dada por

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \qquad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \qquad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$$

ou inversamente

$$z = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}.$$

11. Determine os domínios de diferenciabilidade e de analiticidade das seguintes funções, isto é, os conjuntos de pontos de $\mathbb{C}$ onde admitem derivada e onde são analíticas, calculando a derivada onde ela exista:

a) $xy - ix$	b) $x^2 - y^2 + 2ixy$	c) $x^2 - y + i(x - y^2)$	d) $x^2 - y^2 + 2i\|xy\|$	e) $z^2 - 3z$
f) $\cos(3z) - i$	g) $\mathrm{Im}(z^2)$	h) $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$	i) $z(e^{iz} - e^{-iz})$	j) $\|z\|\bar{z}$
k) $\overline{e^{z}}$	l) $ze^{\bar{z}}$	m) $\frac{1}{z} - \bar{z}$		

12. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $\operatorname{sen}(z) + 3z^2 - ze^{z^3}$ b) $\cos(z) + (2z + 1)^z$ c) $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

13. Deduza as equações de Cauchy-Riemann, em coordenadas polares, da seguinte forma. Seja $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida num conjunto aberto A, tal que $f(z) = u(z) + iv(z)$, para $z \in A$. Seja $T : \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ a aplicação da mudança de coordenadas polares dada por $T(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = \rho\, e^{i\theta}$ (Naturalmente, qualquer outro intervalo de comprimento 2π, para domínio dos ângulos θ, serviria igualmente). Defina $\tilde{u}(\rho, \theta) = u \circ T(\rho, \theta) = u(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = u(\rho\, e^{i\theta})$ e $\tilde{v}(\rho, \theta) = v \circ T(\rho, \theta) = v(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = v(\rho\, e^{i\theta})$.

   a) Mostre que T, como aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, é continuamente diferenciável e tem uma inversa, também continuamente diferenciável.

   b) Usando o teorema da diferenciação de funções compostas, em $\mathbb{R}^2$, mostre que f é analítica no conjunto $A \setminus \{x + iy : x \geq 0\,, y = 0\}$ se e só se $(\tilde{u}, \tilde{v}) : T^{-1}(A) \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann polares, em $T^{-1}(A)$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}.$$

   c) Determine a fórmula para $f'(z) = f'(\rho\, e^{i\theta})$ em coordenadas polares, em função das derivadas parciais de $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ em ordem a ρ e θ.

   d) Sabendo que a função $\log z$ é dada em coordenadas polares por $\log z = \log(\rho\, e^{i\theta}) = \log\rho + i\theta$ verifique que é diferenciável e determine a sua derivada.