Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 13 - 14 a 18 de Dezembro de 2020

1. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valor de fronteira têm soluções não triviais:

   (a) $y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

   (b) $y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

2. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in]0,1[\\ u(0,t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1,t) = \operatorname{sen} 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

   b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3 \operatorname{sen}(2\pi x) - 7 \operatorname{sen}(4\pi x) + \operatorname{sen}(x).$$

3. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha u_{xx}, \ x \in]0,\pi[, \text{ com } \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}(5x). \end{cases}$$

4. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \ x \in]0,L[, \text{ com} \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

5. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se } \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

6. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L,L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

7. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

8. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leqslant 0 \end{cases}$$

9. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

10. Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine, e indique a soma para cada $x \in \mathbb{R}$, da:

    (a) série de senos associada a f;

    (b) série de cosenos associada a f.

11. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

    (a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

    (b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0, t) = T_1,\ u(L, t) = T_2$.

    (c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira
    $$\begin{cases} u(0, t) = 20 \\ u(1, t) = 60 \\ u(x, 0) = 75. \end{cases}$$

12. Seja a função f definida no intervalo $(0, \pi)$ por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

    (a) Determine a série de Fourier de cosenos da função f.

    (b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi, \pi]$.

    (c) Resolva a equação
    $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \ x \in]0, \pi[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

13. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = 0\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$) e onde c é um parâmetro real.

14. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos\,(2\pi x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos\,(2\pi y) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$.

15. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,\pi]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,\pi[$).

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = (\pi - x)x\ .$$

16. Seja f a função definida no intervalo $]0,2\pi[$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de cosenos da função f.

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu,\ x \in]0,2\pi[\\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

17. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0,t) = x\ , \quad u(x,1,t) = x \\ u(0,y,t) = 0\ , \quad u(1,y,t) = 1 \\ u(x,y,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos\left(2\pi\,(x-y)\right) - \cos\left(2\pi\,(x+y)\right) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.