Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 1 - 21 a 25 de Setembro de 2020

1. Escreva os seguintes números complexos na forma $a + bi$ e represente-os geometricamente no plano de Argand:

   a) $(2+i)(1-i)$ b) $\frac{1}{1-i}$ c) $\frac{2+i}{1+i}$ d) $(2-3i)^2$

   e) $\overline{(1-2i)^3}$ f) i^{234} g) $\frac{1}{i} + \frac{3}{1+i}$ h) $\left(1 + \frac{3}{1+i}\right)^2$

2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e represente-os geometricamente:

   a) 3 b) -2 c) $1+i$ d) $1-i$ e) $\sqrt{2}(1+i)$

   f) $\frac{1}{1-i}$ g) $(1-i)(-1-i)$ h) $\frac{(1+i)^2(1+\sqrt{3}i)^3}{(1-i)}$

3. Calcule os seguintes números complexos:

   a) $\sqrt[3]{8i}$ b) $\sqrt[4]{-1}$ c) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$ d) $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$

   e) $\sqrt[4]{(3-\sqrt{3}i)^6}$ f) $\left(\sqrt[4]{3-\sqrt{3}i}\right)^6$

4. Calcule, para $n = 1, 2, 3, ...,$

   a) i^n b) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ c) $(1+i)^n + (1-i)^n$

5. Esboce no plano complexo o conjunto dos números complexos que satisfazem as relações seguintes:

   a) $|z-2| = 2$ b) $|z+2i| \geq 2$ c) $\left|\frac{1}{z-5i}\right| < 3$

   d) $1 < |z-i| < 3$ e) $|z-3i| = |z+i|$ f) $|z-1| \geq |z-1-i|$

   g) $|z-2| + |z+2| = 5$ h) $|z-1| - |z+1| > 1$ i) $|z| = \mathrm{Re}(z) + 2$

   j) $\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z) < 1$ k) $\mathrm{Im}(\frac{z+i}{2i}) < 0$ l) $\mathrm{Re}(\frac{z-1}{z-i}) = 0$

   m) $|z|^2 > z + \bar{z}$ n) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$

6. Determine todas as soluções em $\mathbb{C}$ das seguintes equações:

   a) $z^4 + 16i = 0$
   b) $(1-z)^6 = (1+z)^6$
   c) $1 - z + z^2 = 0$
   d) $z\bar{z} - z + \bar{z} = 0$
   e) $z^4 + z^2 = -1 - i$
   f) $1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0$
   g) $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 6i$
   h) $z^6 = (i+2)^3 + \frac{1-28i}{2-i}$
   i) $1 + z + z^2 + ... + z^7 = 0$

7. Utilize a fórmula de De Moivre para determinar expressões simplificadas das somas:

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}((3k+1)x) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(4x) + \operatorname{sen}(7x) + \cdots + \operatorname{sen}((3n+1)x)$
   b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos((3k+1)x) = \cos(x) + \cos(4x) + \cos(7x) + \cdots + \cos((3n+1)x)$

8. Determine todos os vértices de um polígono regular de n lados, centrado na origem, sabendo que um deles é representado pelo complexo z_1.

9. Sejam z_1, z_2 e z_3 três números complexos de módulo unitário satisfazendo $z_1+z_2+z_3 = 0$. Mostre que esses complexos são vértices de um triângulo equilátero.

10. Suponha-se que define um produto em $\mathbb{R}^2$ que, conjuntamente com a soma vectorial, é compatível com o produto vectorial por escalares (i.e. para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $\alpha(\mathbf{xy}) = (\alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x}(\alpha\mathbf{y})$) e verifica todas as propriedades de corpo (comutatividade, associatividade, distributividade, existência de unidade e inversos). Prove que, necessariamente, existirão então dois vectores linearmente independentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, tais que $\mathbf{vv} = \mathbf{v}$, $\mathbf{ww} = -\mathbf{v}$ e $\mathbf{vw} = \mathbf{w}$. Conclua que essa estrutura é isomorfa a $\mathbb{C}$.