Filtros

Definição 1. Seja X um espaço topológico. Um filtro em X é uma colecção $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X tal que:

(1) $\varnothing \notin \mathscr{F}$
(2) Se $A \in \mathscr{F}$ e $A \subset B$ então $B \in \mathscr{F}$
(3) Se $A, B \in \mathscr{F}$ então $A \cap B \in \mathscr{F}$

Dizemos que x é limite do filtro $\mathscr{F}$ se $\mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}$, e escrevemos $\mathscr{F} \to x$.

Exemplo 2. Seja (x_n) uma sucessão em X. Dizemos que (x_n) está eventualmente num conjunto $A \subset X$, e escrevemos $x_n \in A$ ev. se existir um p tal que $n > p \Rightarrow x_n \in A$. A colecção

$$\mathscr{F}_{(x_n)} = \left\{A \subset X : x_n \in A \text{ ev.}\right\}$$

é um filtro em X e $x_n \to x$ se e só se $\mathscr{F}_{(x_n)} \to x$.

Teorema 3. *Seja X um espaço topológico com subbase $\mathscr{S}$. Então um filtro $\mathscr{F}$ em X converge para um ponto $x \in X$ se e só se $\mathscr{S} \cap \mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{B}$ a base formada por intersecções finitas de elementos de $\mathscr{S}$. Se $\mathscr{S} \cap \mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}$ pela propriedade (3) dos filtros $\mathscr{B} \cap \mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}$. Como para qualquer $U \in \mathscr{V}_x$ existe um $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subset U$, pela propriedade (2) dos filtros $\mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}$ logo $\mathscr{F} \to x$. $\square$

Definição 4. Dados espaços topológicos X e Y, uma função $f\colon X \to Y$ e um filtro $\mathscr{F}$ em X a imagem de $\mathscr{F}$ por f é a colecção de conjuntos

$$f(\mathscr{F}) = \left\{B \subset Y : \underset{A \in \mathscr{F}}{\exists} f(A) \subset B\right\}$$

Teorema 5. *A colecção $f(\mathscr{F})$ é um filtro.*

Demonstração. Verificamos as 3 propriedades dos filtros:

(1) Como $\varnothing \notin \mathscr{F}$, se $A \in \mathscr{F}$ então $f(A) \neq \varnothing$ logo $\varnothing \notin f(\mathscr{F})$.
(2) Segue imediatamente da definição de $f(\mathscr{F})$.
(3) Se $B_1, B_2 \in \mathscr{F}$, para cada $i = 1, 2$ existe um $A_i \in \mathscr{F}$ tal que $f(A_i) \subset B_i$. Então $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}$ e

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \subset B_1 \cap B_2$$

logo $B_1 \cap B_2 \in f(\mathscr{F})$. $\square$

Teorema 6. *Uma função $\mathscr{F}\colon X \to Y$ é contínua num ponto $x \in X$ se e só se para qualquer filtro $\mathscr{F}$ em X tivermos $\mathscr{F} \to x \Rightarrow f(\mathscr{F}) \to f(x)$.*

Demonstração.

($\Rightarrow$): Assumindo que f é contínua em x seja $\mathscr{F}$ um filtro em X tal que $\mathscr{F} \to x$, ou seja, $\mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}$. Queremos mostrar que $f(\mathscr{F}) \to f(x)$, ou seja, que $\mathscr{V}_{f(x)} \subset f(\mathscr{F})$. Dado $V \in \mathscr{V}_{f(x)}$, pela continuidade, existe $U \in \mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}$ tal que $f(U) \subset V$ logo $V \in f(\mathscr{F})$ o que termina a demonstração.

($\Leftarrow$): Exercício. $\square$

Teorema 7. *Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma colecção de espaços topológicos, seja $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ com a topologia produto e para cada $\alpha \in J$ seja $p_\alpha\colon X \to X_\alpha$ a projecção. Então um filtro $\mathscr{F}$ em X converge para $x \in X$ se e só se para todo o $\alpha \in J$ se tiver $p_\alpha(\mathscr{F}) \to p_\alpha(x)$.*

Demonstração.

($\Rightarrow$): Como p_α é contínua, $\mathscr{F} \to x \Rightarrow p_\alpha(\mathscr{F}) \to p_\alpha(x)$.

($\Leftarrow$): Queremos mostrar que $\mathscr{F} \to x$. Pelo Teorema 3 basta considerar vizinhanças da forma $p_\alpha^{-1}(U)$ com $U \subset X_\alpha$ um aberto. Como $x \in p_\alpha^{-1}(U)$, temos $p_\alpha(x) \in U$, ou seja $U \in \mathscr{V}_{p_\alpha(x)}$ e como $p_\alpha(\mathscr{F}) \to p_\alpha(x)$, segue que $U \in p_\alpha(\mathscr{F})$. Mas isto significa que existe um $A \in \mathscr{F}$ tal que $p_\alpha(A) \subset U$, o que é equivalente a $A \subset p_\alpha^{-1}(U)$. Pela propriedade (2) dos filtros, $p_\alpha^{-1}(U) \in \mathscr{F}$. Mostrámos que $\mathscr{S} \cap \mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}$ logo $\mathscr{F} \to x$. □

Recorde que uma colecção de conjuntos $\mathcal{A}$ tem a propriedade de intersecção finita (P.I.F.) se para quaisquer $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ se tiver $A_1 \cap \cdots \cap A_k \neq \varnothing$.

Teorema 8. *Seja $\mathcal{A}$ uma colecção de subconjuntos de X. São equivalentes:*

(1) *Existe um filtro $\mathscr{F}$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathscr{F}$.*
(2) *$\mathcal{A}$ tem a P.I.F.*

Demonstração.

($1 \Rightarrow 2$): Se $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A} \subset \mathscr{F}$ então $A_1 \cap \cdots \cap A_k \in \mathscr{F}$ logo $A_1 \cap \cdots \cap A_k \neq \varnothing$ pela propriedade (1) dos filtros.

($2 \Rightarrow 1$): Seja

$$\mathscr{F} = \left\{ C \subset X : \underset{A_1,\ldots,A_k \in \mathcal{A}}{\exists} A_1 \cap \cdots \cap A_k \subset C \right\}$$

Então $\mathscr{F}$ é um filtro contendo $\mathcal{A}$:

(1) Como $\mathcal{A}$ tem a P.I.F., para quaisquer $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ temos $A_1 \cap \cdots \cap A_k \neq \varnothing$ logo $\varnothing \notin \mathscr{F}$.
(2) Segue de imediato da definição de $\mathscr{F}$
(3) Se $A, B \in \mathscr{F}$ então existem $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ tais que

$$A_1 \cap \cdots \cap A_k \subset A \quad \text{e} \quad B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset B$$

donde segue que

$$A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset A \cap B$$

logo $A \cap B \in \mathscr{F}$. □

Ultrafiltros

Definição 9. Um filtro $\mathscr{U}$ diz-se um ultrafiltro se para qualquer filtro $\mathscr{F}$ tivermos $\mathscr{U} \subset \mathscr{F} \Leftrightarrow \mathscr{U} = \mathscr{F}$.

Lema 10. *Seja $\{\mathscr{F}_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma colecção de filtros tais que para quaisquer $\alpha, \beta \in J$ temos*

$$\mathscr{F}_\alpha \subset \mathscr{F}_\beta \quad \text{ou} \quad \mathscr{F}_\beta \subset \mathscr{F}_\alpha$$

Então $\mathscr{F} = \bigcup_\alpha \mathscr{F}_\alpha$ é um filtro.

Demonstração. Verificamos as 3 propriedades dos filtros:

(1) Como para qualquer $\alpha \in J$ temos $\varnothing \notin \mathscr{F}_\alpha$, segue que $\varnothing \notin \mathscr{F}$.
(2) Se $A \in \mathscr{F}$ e $A \subset B$ então $A \in \mathscr{F}_\alpha$ para algum α logo $B \in \mathscr{F}_\alpha \subset \mathscr{F}$.
(3) Se $A, B \in \mathscr{F}$ então existem $\alpha, \beta \in J$ tais que $A \in \mathscr{F}_\alpha$ e $B \in \mathscr{F}_\beta$. Se $\mathscr{F}_\alpha \subset \mathscr{F}_\beta$ então $A, B \in \mathscr{F}_\beta$ logo $A \cap B \in \mathscr{F}_\beta \subset \mathscr{F}$ e o caso $\mathscr{F}_\beta \subset \mathscr{F}_\alpha$ é completamente análogo. □

Corolário 11. *Qualquer filtro está contido num ultrafiltro.*

Demonstração. Consideramos a colecção $\mathbb{O}$ de todos os filtros em X que contêm $\mathscr{F}$ ordenada por inclusão. Pelo Lema 10 qualquer subconjunto de $\mathbb{O}$ bem ordenado é majorado logo, pelo Lema de Zorn, $\mathbb{O}$ tem um elemento maximal $\mathscr{U}$ que é claramente um ultrafiltro contendo $\mathscr{F}$. □

Teorema 12. *Seja $\mathscr{U}$ um filtro. As seguintes afirmações são equivalentes:*
1. *$\mathscr{U}$ é um ultrafiltro*
2. *Seja $B \subset X$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$ para qualquer $A \in \mathscr{U}$. Então $B \in \mathscr{U}$.*
3. *Para qualquer $B \subset X$ temos $B \in \mathscr{U}$ ou $X \backslash B \in \mathscr{U}$.*

Demonstração.

($1 \Rightarrow 2$): Seja $B \subset X$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$ para qualquer $A \in \mathscr{F}$. Vamos ver que $\mathscr{U} \cap \{B\}$ tem a P.I.F. Dados $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{U}$ seja $A = A_1 \cap \dots \cap A_k \in \mathscr{U}$. Então
$$A_1 \cap \dots \cap A_k \cap B = A \cap B \neq \emptyset$$
como queríamos demonstrar. Pelo Teorema 8, existe um filtro $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{U} \cap \{B\} \subset \mathscr{F}$. Mas então $\mathscr{U} \subset \mathscr{F}$ logo $\mathscr{U} = \mathscr{F}$ logo $B \in \mathscr{U}$.

($2 \Rightarrow 3$): O contrarecíproco de (2) diz-nos que se $B \notin \mathscr{U}$ então existe um $A \in \mathscr{U}$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Mas então $A \subset X \backslash B$ logo pela propriedade (2) dos filtros, $X \backslash B \in \mathscr{U}$.

($3 \Rightarrow 1$): Vamos supor por absurdo que existe um filtro $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{U} \subset \mathscr{F}$ e seja $B \in \mathscr{F} \backslash \mathscr{U}$. Então $B \notin \mathscr{U}$ logo $X \backslash B \in \mathscr{U}$ pelo que $B, X \backslash B \in \mathscr{F}$. Mas então $B \cap X \backslash B = \emptyset \in \mathscr{F}$ o que é uma contradição, terminando a demonstração. □

Corolário 13. *Se $\mathscr{U}$ é um ultrafiltro e $f\colon X \to Y$ é uma função contínua então $f(\mathscr{U})$ é um ultrafiltro.*

Demonstração. Seja $B \subset Y$. Como $\mathscr{U}$ é um ultrafiltro, ou $f^{-1}(B) \in \mathscr{U}$ ou $X \backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \backslash B) \in \mathscr{U}$. Mas
$$f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B \quad \text{e} \quad f\big(f^{-1}(Y \backslash B)\big) \subset Y \backslash B$$
logo, por definição de $f(\mathscr{U})$, ou $B \in f(\mathscr{U})$ ou $Y \backslash B \in f(\mathscr{U})$ pelo que $f(\mathscr{U})$ é um ultrafiltro. □

Definição 14. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um sublimite dum filtro $\mathscr{F}$ se para todo o $A \in \mathscr{F}$ se tiver $x \in \overline{A}$, ou seja, se $x \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{A}$.

Teorema 15. *Se $\mathscr{F} \to x$ então x é um sublimite de $\mathscr{F}$, sendo o recíproco verdadeiro quando $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro.*

Demonstração. Supomos que $\mathscr{F} \to x$. Seja $A \in \mathscr{F}$. Então para qualquer $U \in \mathscr{V}_x$ temos $U, A \in \mathscr{F}$ logo $U \cap A \neq \emptyset$ pelo que $x \in \overline{A}$, o que mostra que x é um sublimite.

Reciprocamente, assumimos que $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro e que x é um sublimite de $\mathscr{F}$. Então para qualquer $A \in \mathscr{F}$ temos $x \in \overline{A}$. Assim, se $U \in \mathscr{V}_x$ então $U \cap A \neq \emptyset$ para todo o $A \in \mathscr{F}$. Pelo Teorema 12 temos $U \in \mathscr{F}$. Mostrámos que $\mathscr{V}_x \subset \mathscr{F}$ logo $\mathscr{F} \to x$ o que termina a demonstração. □

Teorema 16. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*
1. *X é compacto.*
2. *Qualquer filtro em X tem um sublimite.*
3. *Qualquer ultrafiltro em X converge.*

Demonstração.

(1 ⇒ 2): Seja $\mathscr{F}$ um filtro em X. Então $\{\overline{A} : A \in \mathscr{F}\}$ é uma colecção de fechados com a P.I.F. logo $\bigcap_{A\in\mathscr{F}} \overline{A} \neq \varnothing$.

(2 ⇒ 3): Segue de imediato do Teorema 15.

(3 ⇒ 1): Seja $\mathcal{A}$ uma colecção de fechados com a P.I.F.. Pelo Teorema 8 existe um filtro $\mathscr{F}$ contendo $\mathcal{A}$ e pelo Corolário 11 existe um ultrafiltro $\mathscr{U}$ contendo $\mathscr{F}$. Seja $x \in X$ tal que $\mathscr{U} \to x$. Então x é um sublimite de $\mathscr{U}$ logo

$$x \in \bigcap_{A\in\mathscr{U}} \overline{A} \subset \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$$

pelo que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \varnothing$. □

Teorema 17 (Tychonoff)**.** *Se para todo o $\alpha \in J$ o espaço X_α é compacto então $X = \prod X_\alpha$ é compacto na topologia produto.*

Demonstração. Seja $\mathscr{U}$ um ultrafiltro em X. Para cada $\alpha \in J$ $p_\alpha(\mathscr{U})$ é um ultrafiltro em X_α e como X_α é compacto o ultrafiltro $p_\alpha(\mathscr{U})$ converge. Para cada $\alpha \in J$ seja x_α um limite de $p_\alpha(\mathscr{U})$ e seja $x = (x_\alpha)_{\alpha\in J}$. Então $\mathscr{U} \to x$. Mostrámos que qualquer ultrafiltro em X converge logo X é compacto. □

Exercícios

(1) Sejam X e Y espaços topológicos, $x \in X$.

   (a) Mostre que a colecção de conjuntos
   $$\mathcal{F}_x = \left\{A \subset X : x \in \operatorname{int} A\right\}$$
   é um filtro em X que converge para x.

   (b) Seja $f\colon X \to Y$ uma função tal que, para qualquer filtro $\mathcal{F}$ em X, se $\mathcal{F} \to x$ então $f(\mathcal{F}) \to f(x)$. Mostre que f é contínua em x. Sugestão: use o filtro da alínea (a).

(2) Dizemos que um ponto $x \in X$ é um sublimite dum filtro $\mathcal{F} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ se $x \in \bigcap_\alpha \overline{A}_\alpha$. Mostre que num espaço compacto qualquer filtro tem sublimites.