PRELIMINARES.

Começamos por recordar algumas definições e resultados sobre funções $f : X \to Y$.

Definição 0.1. Seja $f : X \to Y$ uma função.

(1) Dado $A \subset X$, o conjunto $f(A) \subset Y$ é a imagem da restrição de f a A:

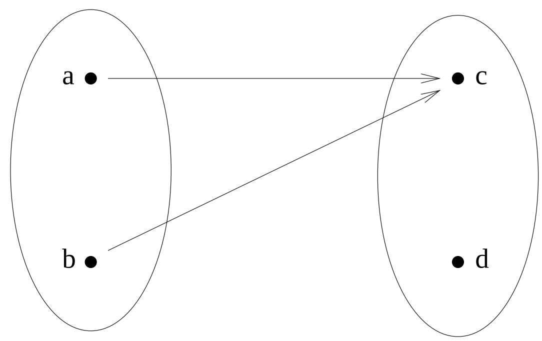
$$f(A) = \left\{ y \in Y \,:\, \underset{x \in A}{\exists}\; y = f(x) \right\} = \{\, f(x) \,:\, x \in A \,\}$$

(2) Dado $B \subset Y$, o conjunto $f^{-1}(B) \subset X$ é o conjunto dos pontos de X cuja imagem está em B:

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \,:\, f(x) \in B \,\}$$

Quando pensamos sobre as propriedades de $f(A)$ e $f^{-1}(B)$ é extremamente útil considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 0.1. Seja $f : \{a, b\} \to \{c, d\}$ a função tal que $f(a) = f(b) = c$ (ver figura).



Então $f(\{a\}) = f(\{b\}) = f(\{a, b\}) = \{c\}$, $f^{-1}(\{c\}) = f^{-1}(\{c, d\}) = \{a, b\}$ e $f^{-1}(\{d\}) = \emptyset$.

Proposição 0.2. *Seja $f : X \to Y$ uma função, $A \subset X$ e $B \subset Y$.*

(1) $A \subset f^{-1}(\,f(A)\,)$ *com igualdade sse f for injectiva.*
(2) $f(\,f^{-1}(B)\,) \subset B$ *com igualdade sse f for sobrejectiva.*

Demonstração.

1a Seja $x \in A$. Então $f(x) \in f(A)$ logo $x \in f^{-1}(\,f(A)\,)$.
1b Se f não é injectiva, existem pontos $a \neq b$ tais que $f(a) = f(b)$. Seja $A = \{a\}$. Então $b \in f^{-1}(\,f(A)\,)$ logo $A \neq f^{-1}(\,f(A)\,)$.
1c Seja f injectiva, $x \in f^{-1}(\,f(A)\,)$. Então $f(x) \in f(A)$ logo existe um $\tilde{x} \in A$ tal que $f(x) = f(\tilde{x})$. Como f é injectiva, $x = \tilde{x} \in A$.
2a Seja $f(x) \in f(\,f^{-1}(B)\,)$, $x \in f^{-1}(B)$. Então $f(x) \in B$.
2b Se f não é sobrejectiva existe um ponto d que não está na imagem. Seja $B = \{d\}$. Então $f^{-1}(B) = \emptyset$ logo $f(\,f^{-1}(B)\,) \neq B$.
2c Seja f sobrejectiva, $y \in B$. Então existe um x tal que $y = f(x) \in B$. Então $x \in f^{-1}(B)$ logo $f(x) \in f(\,f^{-1}(B)\,)$. □

Um corolário importante é

Corolário 0.3. *Seja $f : X \to Y$ uma função, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Então $f(A) \subset B$ sse $A \subset f^{-1}(B)$.*

Demonstração.

$\Rightarrow$ Se $f(A) \subset B$ então $A \subset f^{-1}(\,f(A)\,) \subset f^{-1}(B)$.
$\Leftarrow$ Se $A \subset f^{-1}(B)$ então $f(A) \subset f(\,f^{-1}(B)\,) \subset B$. □

1. Noções básicas

1.1. Vizinhanças. Funções contínuas e homeomorfismos. Topologia é o ramo da matemática que estuda a continuidade. Uma função $f : X \to Y$ contínua num ponto $x \in X$ é uma função que leva pontos próximos de x para pontos próximos de $f(x)$. Para tornar esta ideia precisa é necessário ter alguma estrutura em X e em Y que nos diga o que se entende por proximidade. A noção que precisamos é a de vizinhança. Intuitivamente uma vizinhança é um conjunto contendo todos os pontos próximos de x. A maneira mais conveniente de introduzir vizinhanças é através da noção de aberto:

Definição 1.1. Um espaço topológico é um par (X, τ) em que τ é uma colecção de subconjuntos de X tal que

(1) $\emptyset, X \in \tau$
(2) Dada uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de abertos em X, a união $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ é um conjunto aberto.
(3) $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

Para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_x = \{A \in \tau \,:\, x \in A\}$ é a colecção das vizinhanças de x.

Exercício 1.1. Mostre que intersecções finitas de abertos são abertas.

Observação. Esta é de facto a noção de vizinhança aberta. Alguns livros dão uma definição mais geral de vizinhança, não necessariamente aberta. Nestas notas, vizinhanças serão sempre vizinhanças abertas.

Exemplo 1.1. A topologia usual em $\mathbb{R}^k$ é definida da seguinte maneira: definimos primeiro as bolas

$$B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^k : \|Q - P\| < r\}$$

Dizemos que um conjunto A é aberto sse para todo o $P \in A$ existir uma bola $B_r(P) \subset A$. Mostremos que isto é uma topologia:

(1) Claramente $\emptyset, \mathbb{R}^k$ são abertos.
(2) Dada uma família $\{A_\alpha\}$ de abertos mostremos que $\bigcup A_\alpha$ é aberto. Seja $P \in \bigcup A_\alpha$. Então $P \in A_\beta$ para algum β logo existe uma bola $B_r(P) \subset A_\beta \subset \bigcup A_\alpha$.
(3) Dados A_1, A_2 abertos mostremos que $A_1 \cap A_2$ é aberto. Seja $P \in A_1 \cap A_2$. Então $P \in A_1$ e $P \in A_2$ logo existem bolas $B_{r_1}(P) \subset A_1$ e $B_{r_2}(P) \subset A_2$. $B_{r_1}(P) \cap B_{r_2}(P)$ é a bola $B_r(P)$ de raio $r = \min\{r_1, r_2\}$ e $B_r(P) \subset A_1 \cap A_2$.

Exemplo 1.2. Podemos generalizar este exemplo da seguinte forma: seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vectorial das sucessões (x_n) que são zero a partir de certa ordem. Definimos

$$\|(x_n) - (y_n)\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 + \ldots}$$

Agora definimos bolas e conjuntos abertos da mesma maneira. A demonstração de que isto é uma topologia é exactamente a mesma.

Exemplo 1.3. A recta acabada é o conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Para $P \in \mathbb{R}$ definimos bolas da maneira usual. Para $\pm\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ definimos

$$B_r(+\infty) =]\tfrac{1}{r}, +\infty[\cup \{+\infty\} \qquad B_r(-\infty) =]-\infty, -\tfrac{1}{r}[\cup \{-\infty\}$$

Agora definimos abertos da maneira usual. Mais uma vez isto é uma topologia e a demonstração é a mesma.

Exemplo 1.4. Seja τ a colecção de todos os subconjuntos de X. Esta é a chamada topologia discreta. É a topologia natural em conjuntos finitos. É também a topologia natural no conjuntos dos inteiros $\mathbb{Z}$. Assim, dado $n \in \mathbb{Z}$, o conjunto $\{n\}$ é uma vizinhança de n.

Teorema 1.2. *Seja $A \subset X$ um conjunto tal que $\underset{x\in A}{\forall}\ \underset{U\in\mathcal{V}_x}{\exists}\ U \subset A$. Então A é aberto.*

Demonstração. Para cada x escolhemos um $U_x \subset A$. Então $A = \bigcup U_x$ logo A é aberto. □

Podemos agora definir função contínua:

Definição 1.3. Uma função $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ é contínua em $x \in X$ sse $\underset{U'\in\mathcal{V}_{f(x)}}{\forall}\ \underset{U\in\mathcal{V}_x}{\exists}\ f(U) \subset U'$. f é contínua sse for contínua em todos os pontos $x \in X$.

Como vimos, a condição $f(U) \subset U'$ é equivalente a $U \subset f^{-1}(U')$.

Teorema 1.4. *Uma função $f : X \to Y$ é contínua sse $A \in \tau' \Rightarrow f^{-1}(A) \in \tau$.*

Demonstração.

$\Leftarrow$ Dado $U' \in \mathcal{V}_{f(x)}$ basta tomar $U = f^{-1}(U')$.

$\Rightarrow$ Seja $A \subset Y$ um aberto. Provemos que $f^{-1}(A)$ é aberto. Seja $x \in f^{-1}(A)$. Então $f(x) \in A$ logo $A \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Portanto existe um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subset f^{-1}(A)$. Como isto é verdade para qualquer $x \in f^{-1}(A)$, $f^{-1}(A)$ é aberto. □

Daqui segue imediatamente que

Corolário 1.5. *A composição de funções contínuas é contínua.*

Estamos agora em condições de definir isomorfismo entre espaços topológicos:

Definição 1.6. Dois espaços topológicos (X, τ), (X', τ') dizem-se homeomorfos sse existir uma bijecção $f : X \to X'$ tal que f, f^{-1} são contínuas. f diz-se então um homeomorfismo.

Observação. Se $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ for um homeomorfismo, $A \mapsto f(A)$ induz uma bijecção $f : \tau \to \tau'$ com inversa $A' \mapsto f^{-1}(A')$.

1.2. **Interior e Fecho.** O interior dum conjunto $Y \subset X$ é o maior aberto contido em Y:

Definição 1.7. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $Y \subset X$. O interior de Y é o conjunto definido por

$$\mathrm{int\,Y} = \bigcup\{\mathrm{A} : \mathrm{A} \in \tau,\ \mathrm{A} \subset \mathrm{Y}\}$$

Proposição 1.8. $x \in \mathrm{int\,Y}$ *sse* $\underset{U\in\mathcal{V}_x}{\exists}\ U \subset Y$.

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Se $x \in \operatorname{int} Y$, existe um aberto $A \subset Y$ tal que $x \in A$. Basta tomar $U = A \in \mathcal{V}_x$.
- $\Leftarrow$ Se existe um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subset Y$ então $x \in U$ e $U \in \{A : A \in \tau, A \subset Y\}$ logo $x \in \bigcup\{A : A \in \tau, A \subset Y\} = \operatorname{int} Y$. $\square$

Observação. Tal como referimos anteriormente, por vezes usa-se uma noção de vizinhança mais geral do que a de vizinhança aberta: dizemos que um conjunto V é uma vizinhança de x sse $x \in \operatorname{int} V$. Não usaremos esta definição de vizinhança nestas notas.

Definição 1.9. Um conjunto F diz-se fechado sse F^c for aberto.

Teorema 1.10. *Uma função é contínua sse a imagem inversa de fechados for fechada*

Exercício 1.2. Mostre que a intersecção de conjuntos fechados é fechada.

O fecho dum conjunto Y é o menor fechado que contem Y:

Definição 1.11. O fecho dum conjunto $Y \subset X$, $\bar{Y}$, é definido por

$$\bar{Y} = \bigcap\{F : F \text{ é fechado}, Y \subset F\}$$

Proposição 1.12. *Um conjunto $Y \subset X$ é fechado sse $\bar{Y} \subset Y$.*

Demonstração. $Y \subset \bar{Y}$ logo $\bar{Y} \subset Y \Rightarrow \bar{Y} = Y$. $\bar{Y}$ é fechado logo Y é fechado. Se Y é fechado, $Y \in \{F : F \text{ é fechado}, Y \subset F\}$ logo $\bar{Y} \subset Y$. $\square$

Proposição 1.13. *São equivalentes*

(1) $x \in \bar{Y}$
(2) $\underset{U \in \mathcal{V}_x}{\forall} U \cap Y \neq \emptyset$

Demonstração. $x \in \bar{Y}$ sse para qualquer fechado $F \supset Y$, $x \in F$. Assim,

$$x \notin \bar{Y} \Leftrightarrow \underset{F \text{ fechado}}{\exists} Y \subset F \text{ e } x \notin F$$

Seja $A = F^c$. Então A é um aberto contendo x logo $A \in \mathcal{V}_x$. Assim

$$x \notin \bar{Y} \Leftrightarrow \underset{A \in \mathcal{V}_x}{\exists} Y \subset A^c$$

Agora $Y \subset A^c \Leftrightarrow A \cap Y = \emptyset$. Negando ambos os lados obtemos

$$x \in \bar{Y} \Leftrightarrow \underset{A \in \mathcal{V}_x}{\forall} A \cap Y \neq \emptyset \qquad \square$$

Definição 1.14. Dizemos que um subconjunto $C \subset X$ é denso sse $\bar{C} = X$.

Exercício 1.3. Mostre que $C \subset X$ é denso sse para qualquer aberto A se tiver $A \cap C \neq \emptyset$

1.3. Subespaços.

Definição 1.15. Seja (X, τ_X) um espaço topológico, $Y \subset X$. Então a topologia induzida por X em Y é dada por

$$\tau_Y = \{A \cap X \,:\, A \in \tau\}$$

(Y, τ_Y) diz-se um subespaço de (X, τ_X).

Exercício 1.4. Verifique que τ_Y é uma topologia.

Exemplo 1.5. A topologia induzida por $\mathbb{R}$ em $\mathbb{Z}$ é a topologia discreta. De facto, $]n-1, n+1[\cap\mathbb{Z} = \{n\}$ logo o conjunto $\{n\}$ é aberto.

Seja agora $C \subset Y$ um conjunto. Então podemos falar do fecho de C em Y ou do fecho de C em X:

Exemplo 1.6. Seja $C = Y =]0,1[$ e seja $X = \mathbb{R}$. Então C é fechado em Y logo o fecho de C em Y é igual a C. O fecho de C em $\mathbb{R}$ é igual a $[0,1]$.

Teorema 1.16. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico, $Y \subset X$ um subespaço. Dado $C \subset Y$ sejam $\overline{C}^Y, \overline{C}^X$ os fechos de C em X e em Y respectivamente. Então $\overline{C}^Y = \overline{C}^X \cap Y$.*

Demonstração. Denotamos por $\mathcal{V}_x^X, \mathcal{V}_x^Y$ as vizinhanças de x em X e em Y respectivamente.

(1) Seja $x \in \overline{C}^Y \subset Y$. Mostremos que $x \in \overline{C}^X$. Dado $U \in \mathcal{V}_x^X$, $U \cap Y \in \mathcal{V}_x^Y$ logo $U \cap Y \cap C \neq \emptyset$. Como $C \subset Y$, $U \cap C = U \cap Y \cap C \neq \emptyset$. Portanto $x \in \bar{C}^X$.
(2) Seja $x \in \bar{C}^X \cap Y$. Mostremos que $x \in \bar{C}^Y$. Dado $V \in \mathcal{V}_x^Y$ existe um $W \in \mathcal{V}_x^X$ tal que $V = W \cap Y$. Portanto $V \cap C = W \cap Y \cap C = W \cap C \neq \emptyset$. Logo $x \in \overline{C}^Y$. □

Corolário 1.17. *Seja $Y \subset X$ um subespaço, $C \subset Y$ um conjunto.*

(1) *Se Y for aberto, $C \subset Y$ é aberto em X sse C for aberto em Y.*
(2) *Se Y for fechado, $C \subset Y$ é fechado em X sse C for fechado em Y.*

Demonstração.

(1) Se C for aberto em X então $C = C \cap Y$ é aberto em Y por definição de τ_Y. Se C for aberto em Y existe um aberto A em X tal que $C = A \cap Y$. C é a intersecção de 2 abertos sendo portanto aberto.
(2) $C \subset Y$ logo $\overline{C}^X \subset \overline{Y}^X = Y$ logo $\overline{C}^X = \overline{C}^X \cap Y = \overline{C}^Y$. O resultado segue daqui porque C é fechado sse for igual ao seu fecho. □

Vamos agora estudar alguns resultados sobre a continuidade de funções.

Teorema 1.18. *Seja $Y \subset X$ um subespaço. Então a inclusão $\imath : Y \to X$ é uma função contínua.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ um aberto. Então $\imath^{-1}(A) = \{x \in Y \,:\, \imath(x) \in A\} = Y \cap A$ logo $\imath^{-1}(A)$ é aberto. □

Uma das coisas mais simples que se pode fazer a uma função é mudar-lhe o contradomínio:

Teorema 1.19. *Seja $Y \subset X$ um subespaço. Então uma função $f : Z \to Y$ é contínua sse $\imath \circ f : Z \to X$ for contínua.*

Demonstração. Se f for contínua, $\imath \circ f$ é contínua pela continuidade da composição. Assumimos pois que $\imath \circ f$ é contínua. Seja $A \in \tau_Y$. Então existe um aberto $A' \in \tau_X$ tal que $A = A' \cap Y = f^{-1}(A')$. Logo $f^{-1}(A) = (\imath \circ f)^{-1}(A') \in \tau_Z$. □

Definição 1.20. Seja $Y \subset X$ um subespaço, $f : X \to W$ uma função contínua. Chamamos restrição de f a Y à função $f|_Y = \imath \circ f : Y \to W$.

Claramente $f|_Y$ é contínua.

O próximo teorema é uma ferramenta importante que nos permite construir uma função num espaço topológico X definindo-a primeiro em subespaços de X:

Teorema 1.21 (Lema da colagem)**.** *Seja $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$, $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ funções contínuas tais que para qualquer $x \in X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2}$, $f_{\alpha_1}(x) = f_{\alpha_2}(x)$. $x \in X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2}$. Então*

(1) *Existe uma função $f : X \to Y$ tal que $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$*
(2) *Se cada X_α for aberto, f é contínua.*
(3) *Se a família $\{X_\alpha\}$ for finita e cada X_α for fechado, f é contínua.*

Demonstração.

(1) Seja $x \in X$. Então $x \in X_\alpha$ para algum α. Definimos $f(x) = f_\alpha(x)$. Esta definição não depende da escolha de α: se $x \in X_\beta$, então $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$.
(2) Seja $A \subset Y$ um conjunto aberto. Então
$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap \bigcup_\alpha X_\alpha = \bigcup_\alpha f^{-1}(A) \cap X_\alpha$$
$f^{-1}(A) \cap X_\alpha = f_\alpha^{-1}(A)$. Como f_α é contínua, $f^{-1}(A) \cap X_\alpha$ é aberto em X_α. Como X_α é aberto em X, $f^{-1}(A) \cap X_\alpha$ é aberto em X. Logo $f^{-1}(A)$ é a união de abertos sendo portanto aberto.
(3) Seja $C \subset Y$ um conjunto fechado. Então
$$f^{-1}(C) = \bigcup_\alpha f^{-1}(C) \cap X_\alpha = \bigcup_\alpha f_\alpha^{-1}(C)$$
Como f_α é contínua, $f^{-1}(C) \cap X_\alpha$ é fechado em X_α. Como X_α é fechado em X, $f^{-1}(C) \cap X_\alpha$ é fechado em X. A união finita de fechados é fechada logo $f^{-1}(C)$ é fechado. □

Definição 1.22. Dizemos que $f : Y \to X$ é um mergulho sse $f : Y \to f(X)$ for um homeomorfismo.

1.4. **Bases.** Para lidar mais facilmente com uma topologia, usa-se muitas vezes uma colecção mais pequena de abertos, chamada uma base.

Definição 1.23. Uma colecção $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x$ é uma base de $\mathcal{V}_x$ sse
$$\underset{U \in \mathcal{V}_x}{\forall} \ \underset{B \in \mathcal{B}_x}{\exists} \ B \subset U$$

Exemplo 1.7. Seja τ a topologia discreta em X. Então a colecção $\mathcal{B} = \{\{x\}\}$ é uma base de $\mathcal{V}_x$.

Podemos muitas vezes substituir a colecção de vizinhanças $\mathcal{V}_x$ pela colecção mais pequena $\mathcal{B}_x$:

Teorema 1.24. *Sejam X, Y espaços topológicos com bases $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ para cada $x \in X$, $y \in Y$.*

(1) *Seja $C \subset X$. Então*

$$x \in \operatorname{int} C \iff \underset{B \in \mathcal{B}_x}{\exists} B \subset C$$

(2) *Seja $C \subset X$. Então*

$$x \in \bar{C} \iff \underset{B \in \mathcal{B}_x}{\forall} B \cap C \neq \emptyset$$

(3) *Uma função $f : X \to Y$ é contínua num ponto $x \in X$ sse*

$$\underset{B' \in \mathcal{B}_{f(x)}}{\forall} \underset{B \in \mathcal{B}_x}{\exists} f(B) \subset B'$$

Demonstração.

(1) Se existir um $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset C$, como $B \in \mathcal{V}_x$ obtemos de imediato $x \in \operatorname{int} C$. Seja agora $x \in \operatorname{int} C$. Então existe um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subset C$. Tomemos um $B \in \mathcal{B}_x$ com $B \subset U$. Então $B \subset C$.

(2) Seja $x \in \bar{C}$. Então para qualquer $U \in \mathcal{V}_x$, $U \cap C \neq \emptyset$. Em particular isto é verdade para $B \in \mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x$. Assumimos agora que para qualquer $B \in \mathcal{B}_x$, $B \cap C \neq \emptyset$. Seja $U \in \mathcal{V}_x$. Então existe um $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset U$. Como $B \cap C \neq \emptyset$, necessariamente $U \cap C \neq \emptyset$. Portanto $x \in \bar{C}$.

(3) Dividimos a demonstração em 2 partes:

$\Rightarrow$ Dado $B' \in \mathcal{B}_{f(x)} \subset \mathcal{V}_{f(x)}$ existe um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subset f^{-1}(B')$. Basta escolher $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset U$.

$\Leftarrow$ Dado $U' \in \mathcal{V}_{f(x)}$ tomemos $B' \in \mathcal{B}_{f(x)}$ tal que $B' \subset U$. Então existe um $B \in \mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x$ tal que $f(B) \subset B' \subset U'$. $\square$

Definição 1.25. Uma colecção $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma base de τ sse, para cada $x \in X$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_x$ for uma base de $\mathcal{V}_x$, isto é,

$$\underset{A \in \tau}{\forall} \underset{x \in A}{\forall} \underset{B \in \mathcal{B}}{\exists} x \in B \subset A$$

Exemplo 1.8. A colecção $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ dos subconjuntos de X com um elemento é uma base da topologia discreta. Para cada $x \in X$, a colecção $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ é uma base de $\mathcal{V}_x$.

O nome base advém do facto que qualquer aberto pode ser expresso como união de elementos de $\mathcal{B}$:

Teorema 1.26. *Seja $\mathcal{B}$ uma base de τ, $A \in \tau$. Então existe uma família $\{B_\alpha\} \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_\alpha B_\alpha$.*

Demonstração. Para cada $x \in A$ fixemos um $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$. $x \in B_x$ logo $A \subset \bigcup_{x \in A} B_x$. Mas $\forall_x B_x \subset A$ logo $\bigcup_{x \in A} B_x \subset A$. Portanto $A = \bigcup_{x \in A} B_x$. $\square$

Corolário 1.27. *Sejam $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espaços topológicos, $\mathcal{B}$ uma base de τ_Y. Então uma função $f : X \to Y$ é contínua sse $\underset{B \in \mathcal{B}}{\forall} f^{-1}(B) \in \tau_X$.*

Demonstração. Se f é contínua $f^{-1}(B)$ é aberto porque $\mathcal{B} \subset \tau_Y$. Seja $A \in \tau_Y$. Escrevemos $A = \bigcup_\alpha B_\alpha$ com $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Então $f^{-1}(A) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_alpha)$ é uma união de abertos logo é aberto. $\square$

É possível, e muitas vezes conveniente, definir uma topologia partindo duma colecção de conjuntos $\mathcal{B}$. Definimos simplesmente

$$\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ A \subset X \ : \ \underset{x \in A}{\forall} \ \underset{B \in \mathcal{B}}{\exists} \ x \in B \subset A \right\}$$

No entanto $\tau_{\mathcal{B}}$ não é necessariamente uma topologia.

Teorema 1.28. *Suponhamos que*

(i) $X \in \tau_{\mathcal{B}}$, *isto é*, $\underset{x \in X}{\forall} \ \underset{B \in \mathcal{B}}{\exists} \ x \in B$

(ii) *Dados quaisquer* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \cap B_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$, *isto é*, $\underset{x \in B_1 \cap B_2}{\forall} \ \underset{B_3 \in \mathcal{B}}{\exists} \ x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Então $\tau_{\mathcal{B}}$ *é uma topologia e* $\mathcal{B}$ *é uma base de* $\tau_{\mathcal{B}}$.

Demonstração. Claramente $\mathcal{B} \subset \tau_{\mathcal{B}}$. Logo a última afirmação segue imediatamente da definição de base. Provemos portanto que $\tau_{\mathcal{B}}$ é uma topologia.

(1) $\emptyset, X \in \tau_{\mathcal{B}}$ é imediato.

(2) Seja $\{A_\alpha\} \subset \tau$ uma colecção de abertos. Mostremos que $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau_{\mathcal{B}}$. Dado $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$, $\exists_\beta \, x \in A_\beta$. Como $A_\beta \in \tau_{\mathcal{B}}$, $\underset{B \in \mathcal{B}}{\exists} \ x \in B \subset A_\beta \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$. Logo $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau_{\mathcal{B}}$.

(3) Sejam $A_1, A_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$. Mostremos que $A_1 \cap A_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$. Seja $x \in A_1 \cap A_2$. Então $x \in A_i$ logo $\underset{B_i \in \mathcal{B}}{\exists} \ x \in B_i \subset A_i$ $(i = 1, 2)$. Pela propriedade (ii), existe um $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2$. Logo $A_1 \cap A_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$. □

Exemplo 1.9. Seja $X = \mathbb{R}$ e seja $\mathcal{B} = \{]a, b[: \ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. $\mathcal{B}$ satisfaz as propriedades (i) e (ii). Logo $\mathcal{B}$ define uma topologia τ sobre $\mathbb{R}$. Esta é a topologia usual sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.10. Seja $X = \mathbb{R}^k$ e seja $\mathcal{B} = \{B_r(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^k, r > 0\}$ a colecção das bolas em $\mathbb{R}^k$. Então a intersecção $B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$ não é uma bola mas dado $y \in B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$, existe uma bola $B_r(y) \subset B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$. Demonstraremos este resultado quando falarmos de espaços métricos. Logo $\mathcal{B}$ define uma topologia sobre $\mathbb{R}^2$. Esta é a topologia usual em $\mathbb{R}^k$.

Como exemplo aproveitamos para definir a topologia produto em $X \times Y$:

Definição 1.29. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Então

$$\mathcal{B} = \{U \times V \ : \ U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

define uma topologia em $X \times Y$. Esta topologia é a chamada topologia produto.

Para ver que $\mathcal{B}$ gera de facto uma topologia basta observar que

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}$$

Teorema 1.30. *As projecções* $\pi_1 : X \times Y \to X$ *e* $\pi_2 : X \times Y \to Y$ *são contínuas.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ um aberto. Então $\pi_1^{-1}(A) = A \times Y$ é aberto e de maneira idêntica para π_2. □

Exercício 1.5. Seja $Y \subset X$ um subespaço, $\mathcal{B}$ uma base de X. Mostre que $\{B \cap Y \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ é uma base de Y.

Exercício 1.6. Sejam X, Y espaços topológicos com bases $\mathcal{B}_X$ e $\mathcal{B}_Y$. Mostre que

$$\{B_1 \times B_2 \,:\, B_1 \in \mathcal{B}_X,\, B_2 \in \mathcal{B}_Y\}$$

é uma base de $X \times Y$.

1.5. **Distância. Topologia da métrica.**

Definição 1.31. Uma distância num conjunto X é uma função $d : X \times X \to [0, +\infty[$ tal que

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$ (desigualdade triangular)

Ao par (X, d) chamamos um espaço métrico.

Exemplo 1.11. Recordemos que o produto interno de 2 vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ é definido por

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Definimos $||v|| = \sqrt{v \cdot v}$ e dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos $d(x, y) = ||x - y||$. Mostremos que d é uma métrica.

(1) Primeiro recordamos a desigualdade de Cauchy Schwarz: partimos de

$$\left\| x - \frac{x \cdot y}{||y||^2} y \right\|^2 \geq 0$$

e desenvolvendo obtemos $||x||^2 - \frac{(x \cdot y)^2}{||y||^2} \geq 0$ logo

$$x \cdot y \leq ||x|| ||y||$$

(2) Agora mostramos que $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$:

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= ||x||^2 + 2x \cdot y + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x|| ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

(3) Finalmente

$$d(x, y) = ||x - y|| = ||(x - z) + (z - y)|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(z, y)$$

Exemplo 1.12. Seja X o conjunto das funções contínuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Definimos uma distância em X através de

$$d(f, g) = \mathrm{int}\,{}_0^1 |\mathrm{f(x) - g(x)}|\, \mathrm{dx}$$

Claramente $d(f, g) = d(g, f)$. Para a desigualdade triangular basta observar que

$$\mathrm{int}\,{}_0^1|\mathrm{f(x)-g(x)}|\,\mathrm{dx} \leq \mathrm{int}\,{}_0^1|\mathrm{f(x)-h(x)}|+|\mathrm{h(x)-g(x)}|\,\mathrm{dx} = \mathrm{int}\,{}_0^1|\mathrm{f(x)-h(x)}|\,\mathrm{dx}+\mathrm{int}\,{}_0^1|\mathrm{h(x)-g(x)}|\,\mathrm{dx}$$

Finalmente temos que mostrar que se $d(f, g) = 0$ então $f = g$. Isto segue das propriedades do integral e da continuidade de $|f(x) - g(x)|$.

Definição 1.32. Ao conjunto $B_r(x) = \{y \in X \,:\, d(x, y) < r\}$ chamamos a bola de raio r centrada em x.

Dado um ponto $y \in B_r(x)$ existe sempre uma bola centrada em y contida em $B_r(x)$:

Lema 1.33. *Sejam* $x, y \in X$, $\delta = \varepsilon - d(y, x)$. *Então*

$$B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$$

Demonstração. Dado $z \in B_\delta(y)$, $d(z,y) < \delta$ logo

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + d(y,x) = (\,\varepsilon - d(y,x)\,) + d(y,x) = \varepsilon$$

logo $z \in B_\varepsilon(x)$. □

Algumas definições:

Definição 1.34. Seja (X,d) um espaço métrico, $A \subset X$.

(1) Dado $x \in A$ definimos $d(x,A) = \inf\{d(x,y) \,:\, y \in A\}$
(2) $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \,:\, x,y \in A\}$
(3) A é limitado sse $\operatorname{diam}(A) < \infty$
(4) Uma função $f : X \to Y$ é limitada sse $f(X)$ for limitado

Exemplo 1.13. Seja X um conjunto, (Y,d) um espaço métrico. Seja $\mathcal{B}(X,Y)$ o conjunto das funções limitadas. Definimos

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in X} d(\,f(x), g(x)\,)$$

Então ρ é uma métrica em $\mathcal{B}(X,Y)$:

(1) $\rho(f,g) < \infty$: fixamos $x_0 \in X$ e observamos que

$$d(\,f(x),g(x)\,) \leq d(\,f(x),f(x_0)\,)+d(\,f(x_0),g(x_0)\,)+d(\,g(x_0),g(x)\,) \leq \operatorname{diam} f(X)+d(\,f(x_0),g(x_0)\,)+\operatorname{diam} g(X)$$

portanto, tirando o supremo em x, $\rho(f,g) \leq \operatorname{diam} f(X) + d(\,f(x_0), g(x_0)\,) + \operatorname{diam} g(X)$.
(2) Claramente $\rho(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$ e $\rho(f,g) = \rho(g,f)$
(3) Para a desigualdade triangular observamos que

$$d(\,f(x),g(x)\,) \leq d(\,f(x),h(x)\,) + d(\,h(x),g(x)\,) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

Tirando o supremo em x obtemos $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$.

A esta métrica chamamos métrica uniforme.

Dado um espaço métrico (X,d) queremos agora definir uma topologia em X. Para tal consideramos a colecção $\mathcal{B}$ de todas as bolas em X:

Definição e Proposição 1.35. A topologia canónica em (X,d) é a topologia gerada pela base

$$\mathcal{B} = \{\, B_\varepsilon(x) \,:\, \varepsilon > 0, x \in X \,\}$$

Demonstração. Provemos que a colecção $\tau_{\mathcal{B}}$ definida por $\mathcal{B}$ é uma topologia. Seja $x \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$. Seja $\delta_i = \varepsilon_i - d(x, x_i)$. Então

$$x \in B_{\delta_1}(x) \cap B_{\delta_2}(x) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$x \in B_\delta(x) \subset B_{\delta_1}(x) \cap B_{\delta_2}(x) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$$

Do lema 1.33 segue que $\mathcal{B}_x$ é uma base de $\mathcal{V}_x$. □

Claramente, a topologia associada à distância $d(x,y) = \|x - y\|$ em $\mathbb{R}^n$ é a topologia usual.

Exercício 1.7. Seja X um conjunto. Definimos

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \neq y \\ 0 \text{ se } x = y \end{cases}$$

Mostre que (X, d) é um espaço métrico e que a topologia associada é a topologia discreta.

Nem todas as topologias vêm duma métrica:

Exemplo 1.1. Seja $\tau = \{\emptyset, X\}$. τ é claramente uma topologia em X. Vamos supor que τ vem duma distância d. Como as bolas são abertas vemos que $B_r(x) = X$ para qualquer r, x logo X tem apenas um elemento.

Definição 1.36. Um espaço topológico (X, τ) diz-se metrizável sse existir uma métrica d em X induzindo a topologia τ.

É também importante notar que duas métricas diferentes podem dar origem à mesma topologia:

Exercício 1.8. Seja (X, d) um espaço métrico.
(1) Mostre que as bolas $B_r(x)$ com $0 < r < 1$ formam uma base da topologia de X
(2) Mostre que $\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$ é uma métrica em X que gera a mesma topologia que d.

Lema 1.37. *Para qualquer $r > 0$, a colecção*

$$\mathcal{B}_y = \{\, B_\delta(y) \ : \ 0 < \delta < r\}$$

é uma base para $\mathcal{V}_y$.

Demonstração. Seja $U \in \mathcal{V}_y$. Então existe uma bola $B_\varepsilon(x) \subset U$ com $y \in B_\varepsilon(x)$. Seja $\delta = \min\{\varepsilon - d(y,x), \frac{r}{2}\}$. Então $B_\delta(y) \in \mathcal{B}_y$ e, por 1.33, $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$. □

Teorema 1.38. *Seja (X, d) um espaço métrico, $A \subset X$. Então $x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.*

Demonstração.
$\Rightarrow$ Seja $x \in \bar{A}$. Então para qualquer $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Tomemos $y \in B_\varepsilon(x) \cap A$. Então $d(x,y) < \varepsilon$. Logo $d(x, A) = 0$.
$\Leftarrow$ Vamos supor que $x \notin \bar{A}$. Como as bolas centradas em x são uma base de $\mathcal{V}_x$, existe uma bola tal que $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Mas então para qualquer $y \in A$, $d(x,y) \geq r$. Logo $d(x, A) \geq r > 0$. □

Teorema 1.39. *Seja (X, d) um espaço métrico, $A \subset X$. Então a restrição $d|_{A \times A}$ é uma métrica em A que gera a topologia de subespaço.*

Demonstração. Basta observar que as bolas de raio r em A são precisamente $B_r(x) \cap A$. □

Teorema 1.40. *Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Definimos*

$$\rho(\,(x_1, x_2)\,,\,(y_1, y_2)\,) = \max\{\, d_1(x_1, y_1)\,,\, d_2(x_2, y_2)\,\}$$

Então ρ gera a topologia produto em $X_1 \times X_2$.

Demonstração. Basta observar que a bola de raio r é precisamente

$$B_r(x_1, x_2) = B_r(x_1) \times B_r(x_2)$$

□

1.6. **Sucessões. Primeiro axioma de numerabilidade.** Uma sucessão num conjunto X é uma colecção de elementos de X indexada pelos naturais, isto é, uma função $x : \mathbb{N} \to X$. Representamos os termos da sucessão por x_n e a sucessão por (x_n).

Dizemos que uma propriedade se verifica eventualmente, ou para n grande, se existir um $N > 0$ tal que a propriedade se verifica para qualquer $n > N$.

Definição 1.41. Uma sucessão (x_n) converge para um ponto $x \in X$ sse x_n está eventualmente em qualquer vizinhança de x, isto é,

$$\underset{U \in \mathcal{V}_x}{\forall} \; \underset{N>0}{\exists} \; \underset{n>N}{\forall} \; x_n \in U$$

Dizemos então que x é um limite de (x_n) e escrevemos $x_n \to x$.

Exemplo 1.14. Seja $\mathcal{B}(X, Y)$ o espaço das funções limitadas $f : X \to Y$ com a métrica uniforme. Uma sucessão (f_n) de funções converge para uma função f sse

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{N>0}{\exists} \; \underset{n>N}{\forall} \; \sup_{x \in X} d(\, f_n(x), f(x)\,) < \varepsilon$$

Dizemos então que (f_n) converge uniformemente para f.

Exercício 1.9. Seja $\mathcal{B}_x$ uma base de $\mathcal{V}_x$. Mostre que $x_n \to x$ sse (x_n) está eventualmente em qualquer elemento de $\mathcal{B}_x$.

Exercício 1.10. Mostre que $x_n \to x$ sse $d(x_n, x) \to 0$

O limite duma sucessão não é necessariamente único:

Exemplo 1.15. Seja $\tau = \{X, \emptyset\}$ a topologia indiscreta. Então qualquer ponto em x é limite de qualquer sucessão (x_n).

Uma condição suficiente para a unicidade de limite é o espaço ser de Hausdorff:

Definição 1.42. Um espaço topológico é um espaço de Hausdorff sse

$$\underset{x,y \in X}{\forall} \; \underset{U \in \mathcal{V}_x V \in \mathcal{V}_y}{\exists} U \cap V = \emptyset$$

Exercício 1.11. Mostre que num espaço topológico de Hausdorff, qualquer sucessão tem no máximo um limite.

Ser um espaço de Hausdorff não é uma condição necessária para a unicidade de limite:

Exercício 1.12.

(1) Mostre que uma sucessão que é eventualmente constante igual a x tem x como limite.
(2) Mostre que na topologia cocontável x é limite duma sucessão (x_n) sse (x_n) for eventualmente constante igual a x.
(3) Mostre que a topologia cocontável não é necessariamente de Hausdorff.

As noções de continuidade e de fecho podem ser definidas em termos de sucessões:

Definição 1.43.

(1) Uma função $f : X \to Y$ é sequencialmente contínua num ponto $x \in X$ sse, para qualquer sucessão $x_n \to x$ se tiver $f(x_n) \to f(x)$
(2) Um ponto X é sequencialmente aderente a um conjunto $C \subset X$ sse existir uma sucessão $(x_n) \in C$ convergindo para x.

Teorema 1.44.
(1) *Um ponto sequencialmente aderente é aderente.*
(2) *Num espaço métrico um ponto aderente é sequencialmente aderente.*
(3) *Uma função contínua em x é sequencialmente contínua em x.*
(4) *O recíproco de (3) é verdadeiro num espaço métrico.*

Demonstração.
(1) Seja x um ponto seccionalmente aderente a A, $U \in \mathcal{V}_x$. Seja (x_n) uma sucessão em A comvergindo para x. Então x_n está eventualmente em U. Em particular $U \cap A \neq \emptyset$ logo $x \in \bar{A}$.
(2) Seja $x \in \bar{A}$. Para cada n tomemos um ponto $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset$. Mostremos que $x_n \to A$. O conjunto das bolas $\{B_{\frac{1}{k}}(x)\}$ é uma base de $\mathcal{V}_x$ e $x_n \in B_{\frac{1}{k}}(x)$ para $n \geq k$ logo (x_n) está eventualmente em $B_{\frac{1}{k}}(x)$.
(3) Seja $f : X \to Y$ uma função contínua em x. Dada uma sucessão $x_n \to x$ seja $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Então existe uma vizinhança $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $f(U) \subset V$. (x_n) está eventualmente em U logo $(f(x_n))$ está eventualmente em $f(U) \subset V$. Logo $f(x_n) \to f(x)$.
(4) Vamos supor que f não é contínua em x. Ent ao

$$\underset{V \in \mathcal{V}_{f(x)}}{\exists} \; \underset{U \in \mathcal{V}_x}{\forall} \; U \not\subset f^{-1}(V)$$

Para cada n tomemos $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \setminus f^{-1}(V)$. Ent ao $x_n \to x$ tal como em (1b). Mas $x_n \notin f^{-1}(V)$ logo $f(x_n) \notin V$ pelo que $f(x_n)$ não converge para $f(x)$. ☐

(2) e (4) não se verificam num espaço topológico arbitrário:

Exemplo 1.16. Consideremos $\mathbb{R}$ com a topologia cocontável. $\overline{[0,1]}$ é o menor fechado que contém $[0,1]$, ou seja $\mathbb{R}$. Como apenas as sucessões eventualmente constantes convergem, o fecho sequencial de $[0,1]$ é o próprio conjunto $[0,1]$.

No entanto para estas propriedades se verificarem precisamos de bastante menos que um espaço métrico:

Definição 1.45. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) tem o primeiro axioma de numerabilidade sse para qualquer $x \in X$ existir uma base $\mathcal{B}_x$ de $\mathcal{V}_x$ numerável.

Exercício 1.13. Dê um exemplo dum espaço não metrizável que satisfaça o primeiro axioma de numerabilidade.

Seja $\mathcal{B}_x = \{U_1, U_2, \ldots\}$ uma base de $\mathcal{V}_x$ Definimos, para cada n, $B_n = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$. Estes B_n vão substituir as bolas $B_{\frac{1}{n}}(x)$ nas demonstrações de (2) e de (4):

Lema 1.46. *Seja (x_n) uma sucessão tal que $\forall_n \, x_n \in B_n$. Então x é um limite de (x_n).*

Demonstração. Seja $U_k \in \mathcal{B}_x$. Então para qualquer $m \geq k$ temos $x_m \in B_m \subset U_k$ logo (x_n) está eventualmente em U_k. Portanto $x_n \to x$. ☐

Exercício 1.14. Mostre que (2) e (4) se verificam num espaço com o primeiro axioma de numerabilidade.

1.7. **Axiomas de numerabilidade.** Já vimos um dos axiomas de numerabilidade, nomeadamente a existência, para cada $x \in X$, duma base de vizinhanças contável.

Definição 1.47. Um espaço topológico (X, τ) tem o segundo axioma de numerabilidade sse existir uma base $\mathcal{B}$ contável da topologia τ.

Este axioma tem algumas consequências importantes. Primeiro duas definições:

Definição 1.48. Seja (X, τ) um espaço topológico.
- Dizemos que X é separável sse existir um subconjunto $C \subset X$ contável denso.
- Dizemos que X é Lindelöf sse o seguinte se verificar: dada qualquer família de abertos $\{U_\alpha\}$ tais que $X = \bigcup U_\alpha$, existe uma subfamília contável $\{U_{\alpha_n}\} \subset \{U_\alpha\}$ tal que $X = \bigcup U_{\alpha_n}$.

Teorema 1.49. *Seja (X, τ) um espaço topológico satisfazendo o segundo axioma de numerabilidade. Então*
(1) *X satisfaz o primeiro axioma de numerabilidade;*
(2) *X é separável;*
(3) *X é Lindelöf.*

Demonstração.
(1) Basta observar que $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_x$ é uma base de $\mathcal{V}_x$.
(2) Para cada $B \in \mathcal{B}$ escolhemos um ponto $x_B \in B$. Então o conjunto $\{x_B\}$ é denso: dado $U \in \tau$ existe um $B \subset U$ logo $x_B \in U$.
(3) Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de abertos tal que $X = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$. Seja
$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ B \in \mathcal{B} \, : \, \underset{\alpha}{\exists} \, B \subset U_\alpha \right\}$$
Para cada $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ escolhemos $\alpha_B \in I$ tal que $B \subset U_{\alpha_B}$. Basta agora mostrar que $X = \bigcup\limits_{B \in \tilde{\mathcal{B}}} U_{\alpha_B}$. Seja $x \in X$. Então existe um $\alpha \in I$ tal que $x \in U_\alpha$. Como $\mathcal{B}$ é uma base, existe um $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_\alpha$. Assim, $B \in \tilde{\mathcal{B}}$. Portanto $x \in B \subset U_{\alpha_B}$. □

Num espaço métrico, de facto, (2) e (3) são equivalências:

Teorema 1.50. *Seja (X, d) um espaço métrico. São equivalentes*
(1) *X satisfaz o segundo axioma de numerabilidade*
(2) *X é separável*
(3) *X é Lindelöf*

Demonstração. Mostremos que (2) $\Rightarrow$ (1): seja $C = \{x_n\}$ um conjunto contável denso. Seja
$$\mathcal{B} = \{B_q(x_n) \, : \, q \in \mathbb{Q}, \; x_n \in C\}$$
Mostremos que $\mathcal{B}$ é uma base. Seja U um aberto, $x \in U$. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$. Tomemos um ponto $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap C$. Então $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon - d(x_n, x)$ logo
$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n) \subset B_{\varepsilon - d(x_n,x)}(x_n) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$$

Tomemos um racional $q \in \left]d(x_n, x), \frac{\varepsilon}{2}\right[$. Então
$$x \in B_q(x_n) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n) \subset U$$
A demonstração que (3) $\Rightarrow$ (1) fica como exercício. $\square$

2. Espaços métricos completos

2.1. Sucessões de Cauchy.

Definição 2.1. Uma sucessão $\{x_n\}$ é de Cauchy sse
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{m,n\geq N}{\forall}\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

A condição $\underset{m,n\geq N}{\forall} d(x_n, x_m) < \varepsilon$ é equivalente a $\operatorname{diam}\{x_N, x_{N+1}, \ldots\} < \varepsilon$. Assim

Proposição 2.2. *Uma sucessão $\{x_n\}$ é de Cauchy sse*
$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}\{x_N, x_{N+1}, \ldots\} = 0$$

Exercício 2.1. Mostre que uma sucessão convergente é de Cauchy.

Exercício 2.2. Mostre que uma sucessão de Cauchy é limitada, isto é, $\operatorname{diam}\{x_n\} < \infty$.

2.2. Espaços métricos completos.

Definição 2.3. Um espaço métrico (X, d) é completo sse qualquer sucessão de Cauchy converge.

Exemplo 2.1. $\mathbb{R}$ é completo. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ não é completo.

Exercício 2.3. Mostre que o espaço X das funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ com a distância definida pelo integral não é completo.

Um exemplo importante de espaço métrico completo é o seguinte:

Teorema 2.4. *Seja X um conjunto, (Y, d) um espaço métrico completo. Então o espaço $\mathcal{B}(X, Y)$ das funções $f : X \to Y$ limitadas com a métrica uniforme é completo.*

Demonstração. Seja (f_n) uma sucessão de Cauchy em $\mathcal{B}(X)$. Então, para qualquer $x \in X$, como $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \rho(f_n, f_m)$ logo $(f_n(x))$ é uma sucessão de Cauchy em Y. Como Y é completo, a sucessão converge. Definimos $f(x) = \lim f_n(x)$. Como (f_n) é Cauchy, para qualquer ε existe um N tal que
$$m, n > N \Longrightarrow \rho(f_n, f_m) = \sup_{x\in X} d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$
ou seja,
$$m, n > N \Longrightarrow \underset{x\in X}{\forall}\ d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$
Tomando o limite quando $m \to \infty$ obtemos
$$n > N \Longrightarrow \underset{x\in X}{\forall}\ d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$
Falta apenas mostrar que $f \in \mathcal{B}(X, Y)$:
$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) \leq d(f(x), f_n(x)) + \operatorname{diam} f_n(X) + d(f_n(y), f(y))$$
pelo que escolhendo n suficientemente grande obtemos $d(f(x), f(y)) \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam} f_n(X)$ pelo que $\operatorname{diam} f(X) < \infty$. $\square$

Um subespaço dum espaço completo não é necessariamente completo como mostra o exemplo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. De facto temos

Proposição 2.5. *Seja X um espaço métrico completo. Um subespaço $Y \subset X$ é completo sse Y for fechado em X.*

Demonstração.

$\Rightarrow$ Seja $Y \subset X$ um espaço completo. Vamos mostrar que $\bar{Y} = Y$, logo Y é fechado. Seja $x \in \bar{Y}$. Então existe uma sucessão (x_n) em Y convergindo para x. Logo (x_n) é Cauchy. Como Y é completo, (x_n) converge para um ponto $y \in Y$. Por unicidade do limite, $x = y \in Y$.

$\Leftarrow$ Seja $Y \subset X$ fechado, ou seja, $\bar{Y} = Y$. Seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em Y. Como X é completo, (x_n) converge para um $x \in X$. Portanto $x \in \bar{Y} = Y$. $\square$

Nota: a implicação $\Rightarrow$ é válida independentemente de X ser completo ou não.

Uma caracterização importante de espaços completos é a seguinte:

Teorema 2.6. *Um espaço X é completo sse para qualquer sucessão de fechados encaixados $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ tais que $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, se tem $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.*

Demonstração.

$\Rightarrow$ Para cada n tomemos pontos $x_n \in F_n$. Então $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset F_n$ logo $\operatorname{diam}\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \to 0$. Portanto x_n é de Cauchy logo $x_n \to x$. Como $x_n \in F_N$ para $n > N$, $x \in \bar{F}_N = F_N$. Logo $x \in \bigcap_n F_n$.

$\Leftarrow$ Seja $\{x_n\}$ uma sucessão de Cauchy. Seja $A_n = \{x_n, x_{n+1} \ldots\}$. Então $\operatorname{diam}(\bar{A}_n) = \operatorname{diam}(A_n) \to 0$ logo existe um $x \in \bigcap_n \bar{A}_n$. Para $n > N$, $x_n \in A_N$ logo $d(x_n, x) \leq \operatorname{diam}\bar{A}_N$. Logo $x_n \to x$. $\square$

Como aplicação deste resultado temos o seguinte

Teorema 2.7. *Seja (X, d_X) um espaço métrico. Então existe um espaço métrico (Y, d_Y) e uma isometria $\phi : X \to Y$ tal que*

(1) *Y é completo*
(2) *A imagem $\phi(X)$ é densa em Y*

Este espaço Y é único no seguinte sentido: se existir outra isometria $\tilde{f} : X \to \tilde{Y}$ satisfazendo as condições (1) e (2) então existe uma isometria $g : Y \to \tilde{Y}$ tal que $\tilde{f} = g \circ f$.

Chamamos a este espaço Y o completado de X.

Demonstração. Vamos construir um mergulho isométrico $\phi : X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Fixemos um ponto $x_0 \in X$. Para cada $x \in X$ definimos uma função $f_x : X \to \mathbb{R}$ por

$$f_x(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$$

Mostremos que $f_x \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Pela desigualdade triangular

$$d(x, y) - d(x_0, y) \leq d(x, x_0) \qquad d(x_0, y) - d(x, y) \leq d(x, x_0)$$

Logo $|f_x(y)| \leq d(x, x_0)$. Seja $\phi : X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ a função definida por $\phi(x) = f_x$. Mostremos que ϕ é uma isometria. Sejam $x, z \in X$. Então

$$\rho(\phi(x), \phi(z)) = \sup_{y \in X} |f_x(y) - f_z(y)| = \sup_{y \in X} |d(x, y) - d(z, y)|$$

Como $|d(x,y) - d(z,y)| \leq d(x,z)$ obtemos $\rho(\phi(x), \phi(z)) \leq d(x,z)$. Pondo $y = z$ obtemos $\rho(\phi(x), \phi(z)) \geq |d(x,z) - d(z,z)| = d(x,z)$.

Basta agora definir $Y = \overline{\phi(X)}$. Y é completo porque é fechado e $\phi : X \to Y$ é um mergulho isométrico cuja imagem é densa. $\square$

2.3. **Propriedades topológicas. Continuidade uniforme.**

Definição 2.8. Dizemos que uma propriedade dum espaço métrico X é uma propriedade topológica sse for invariante por homeomorfismos, isto é, se X tem a propriedade e X é homeomorfo a Y então Y também tem a propriedade.

Exercício 2.4. Mostre que ser um espaço de Hausdorff é uma propriedade topológica.

Exemplo 2.2. A função $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo. Isto mostra que ser limitado ou ser completo não são propriedades topológicas.

Ser completo não é uma propriedade topológica porque uma função contínua não leva necessariamente sucessões de Cauchy em sucessões de Cauchy:

Exemplo 2.3. Seja $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ a função $f(x) = \frac{1}{x}$. A sucessão $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy mas a sucessão $f(x_n) = n$ não é.

Introduzimos agora a noção de função uniformemente contínua:

Definição 2.9. Sejam (X, d_x) e (Y, d_Y) espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é uniformemente contínua sse

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x,y\in X}{\forall} \ d_X(x,y) < \delta \Longrightarrow d_Y(\, f(x), f(y)\,) < \varepsilon$$

Uma função uniformemente contínua leva sucessões de Cauchy em sucessões de Cauchy:

Proposição 2.10. *Seja $(x_n) \in X$ uma sucessão de Cauchy, $f : X \to Y$ uma função uniformemente contínua. Então $(\, f(x_n)\,)$ é uma sucessão de Cauchy.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Como (x_n) é Cauchy existe um N tal que $m, n > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ o que mostra que $(f(x_n))$ é Cauchy. $\square$

Teorema 2.11. *Sejam X, Y espaços métricos, Y completo e $A \subset X$. Então, dada uma função $f : A \to Y$ uniformemente contínua existe uma função $\tilde{f} : \bar{A} \to Y$ uniformemente contínua tal que $\tilde{f}|_A = f$.*

Chamamos à função $\tilde{f}$ uma extensão de f.

Demonstração. Seja $x \in \bar{A}$. Tomemos uma sucessão (x_n) em A tal que $x_n \to x$. Como f é uniformemente contínua e x_n é de Cauchy, $f(x_n)$ é de Cauchy. Como Y é completo, $f(x_n)$ converge. Definimos $\tilde{f}(x) = \lim f(x_n)$.

Mostremos que $\tilde{f}(x)$ não depende da escolha da sucessão x_n. Seja $\hat{x}_n \to x$ outra sucessão. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos δ tal que $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Tomemos então N tal que $n > N \Rightarrow d(x_n, \hat{x}_n) < \delta$. Então, para $n > N$, $d(f(x_n), f(\hat{x}_n)) < \varepsilon$ logo o limite é o mesmo e portanto $\tilde{f}$ não depende da escolha da sucessão.

Mostremos que $\tilde{f}$ é uniformemente contínua. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta > 0$ tal que

$$\underset{x,y\in A}{\forall} \ d(x,y) < 3\delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Vamos mostrar que

$$\underset{x,y\in\bar{A}}{\forall}\ d(x,y)<\delta \Longrightarrow d(\tilde{f}(x),\tilde{f}(y))<\varepsilon$$

o que prova que $\tilde{f}$ é uniformemente contínua. Sejam $x, y \in \bar{A}$ com $d(x,y) < \delta$. Tomemos sucessões em A $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Agora escolhemos $N > 0$ tal que

$$d(x_N,x)<\delta \qquad\qquad d(\,f(x_N),\tilde{f}(x)\,)<\frac{\varepsilon}{3}$$
$$d(y_N,y)<\delta \qquad\qquad d(\,f(y_N),\tilde{f}(y)\,)<\frac{\varepsilon}{3}$$

Então

$$d(x_N,y_N)\le d(x_N,x)+d(x,y)+d(y,y_N)<3\delta$$

portanto $f(\,f(x_N),f(y_N)\,)<\frac{\varepsilon}{3}$. Logo

$$d(\,\tilde{f}(x),\tilde{f}(y)\,)\le d(\,\tilde{f}(x),f(x_N)\,)+d(\,f(x_N),f(y_N)\,)+d(\,f(y_N),\tilde{f}(y)\,)<\varepsilon$$

o que termina a demonstração. □

2.4. **Espaços de Baire.**

Definição e Proposição 2.12. Um espaço topológico X é um espaço de Baire sse uma das seguintes condições equivalentes se verificar:

(1) A intersecção duma família contável de abertos densos é densa.
(2) A união duma família contável de fechados de interior vazio tem interior vazio

Demonstração. Para ver que as duas condições são equivalentes basta observar que $\bar{A} = X \Leftrightarrow (\bar{A})^c = \emptyset$ e recordar que $(\bar{A})^c = \operatorname{int}(A^c)$. □

Teorema 2.13. *Um espaço completo é um espaço de Baire.*

Demonstração. Seja $\{A_n\}$ uma família contável de abertos densos. Seja $U \in \tau$. Mostremos que $U \cap \bigcap A_n \neq \emptyset$.

Como A_1 é denso, $U \cap A_1 \neq \emptyset$. Logo existe uma bola $B \subset U \cap A_1$. Seja B_1 uma bola de raio menor de forma que $\bar{B}_1 \subset B \subset U \cap A_1$. Escolhendo o raio suficientemente pequeno podemos também garantir que $\operatorname{diam} B_1 < 1$.

Agora $B_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ logo escolhemos uma bola B_2 tal que $\bar{B}_2 \subset B_1 \cap A_2$ e $\operatorname{diam} B_2 < \frac{1}{2}$. Continuamos, construindo bolas B_n com $\bar{B}_n \subset B_{n-1} \cap A_n$ e $\operatorname{diam} B_n < \frac{1}{n}$. Então, como X é completo, existe um ponto $x \in \bigcap \bar{B}_n \subset \bigcap A_n$. Logo $x \in U \cap \bigcap A_n \neq \emptyset$. □

Como corolário imediato temos o seguinte:

Corolário 2.14. *Seja X um espaço métrico completo sem pontos isolados, isto é, para qualquer $x \in X$ o conjunto $\{x\}$ não é aberto. Então X não é numerável.*

Demonstração. X é um espaço de Baire e $X = \bigcup\{x\}$ logo esta união não pode ser numerável. □

Em particular, $\mathbb{R}$ não é numerável.

Teorema 2.15 (Limitação Uniforme). *Seja X um espaço de Baire e Y um espaço métrico. Seja $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma família pontualmente limitada de funções contínuas $f_\alpha : X \to Y$, isto é, para cada $x \in X$, $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in I}$ é um subconjunto limitado de Y. Então existe um aberto $A \subset X$ tal que o conjunto*

$$\{f_\alpha(x) \,:\, x \in A, \alpha \in I\}$$

é limitado.

Demonstração. Fixemos um ponto $y \in Y$. Seja $F_{M,\alpha} = \{x \in X \,:\, d(f_\alpha(x), y) \leq M\}$. Então $F_{M,\alpha}$ é fechado logo $F_M = \bigcap_\alpha F_{M,\alpha}$ é fechado. Como para cada x, $\{f_\alpha(x)\}$ é limitado, $X = \bigcup_M F_M$ logo existe um M tal que $A = \operatorname{int} F_M \neq \emptyset$. Dado qualquer $x \in A$ e qualquer α temos então $d(f_\alpha(x), y) \leq M$ o que termina a demonstração. $\square$

3. Compacidade

3.1. Espaços compactos.

Definição 3.1. Um espaço topológico (X, τ) é compacto sse para qualquer colecção $\{U_\alpha\}$ de abertos tais que $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, existem índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $X = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$.

Exercício 3.1. Mostre que qualquer conjunto finito é compacto.

Uma das grandes vantagens dos espaços compactos é permitirem muitas vezes passar de propriedades locais para propriedades globais. Apresentamos dois exemplos:

Proposição 3.2. *Seja X um espaço compacto.*

(1) *Um conjunto $C \subset X$ diz-se localmente finito em x sse existir um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \cap C$ é finito. Um conjunto localmente finito em todos os pontos, é finito.*
(2) *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se localmente limitada em x sse existir um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que a restrição $f|_U$ é limitada. Uma função localmente limitada em todos os pontos é limitada.*

Demonstração. Para cada x escolhemos um U_x para o qual a propriedade é satisfeita. Então $X \subset \bigcup U_x$ logo $X \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Isto mostra que a propriedade é satisfeita por X também. $\square$

Teorema 3.3. *Um subespaço $Y \subset X$ é compacto sse para qualquer colecção $\{U_\alpha\}$ de abertos de X tais que $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, existem índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $Y \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$.*

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Se $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, $U_\alpha \in \tau_X$, então $Y = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap Y)$ logo $Y = (U_{\alpha_1} \cap Y) \cup \ldots \cup (U_{\alpha_n} \cap Y) \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$.
- $\Leftarrow$ Se $Y \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$, $V_\alpha \in \tau_Y$, então para cada α $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$, $U_\alpha \in \tau_X$. Logo $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ portanto $Y \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$. Mas então $Y = (U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}) \cap Y = V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}$. $\square$

Exercício 3.2. Descreva os conjuntos compactos nas topologias discreta e indiscreta.

Teorema 3.4. *Seja X um espaço topológico, $\mathcal{B}$ uma base de X. Então X é compacto sse qualquer cobertura $\{B_\alpha\}$ de X por elementos de $\mathcal{B}$ tiver uma subcobertura finita.*

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X. Para cada $x \in X$ podemos escolher α_x e $B_x \in \mathcal{B}$ tais que $x \in B_x \subset U_{\alpha_x}$. Então $X \subset \bigcup B_x$ logo

$$X \subset B_{x_1} \cup \ldots \cup B_{x_m} \subset U_{\alpha_{x_1}} \cup \ldots \cup U_{\alpha_{x_m}}$$

$\square$

Proposição 3.5. *O intervalo $[a, b]$ é compacto.*

Demonstração. Como $[a, b]$ é homeomorfo a $[0, 1]$ basta mostrar que $[0, 1]$ é compacto. Seja $\{U_\alpha =]a_\alpha, b_\alpha[\}$ uma cobertura aberta de $[0, 1]$. Seja

$$S = \{\, x \geq 0 \,:\, [0, x] \text{ pode ser coberto por um número finito de } U_\alpha \,\}$$

Claramente $0 \in S$. Queremos mostrar que $1 \in S$. Seja s o supremo de S. Basta mostrar que $s > 1$. Vamos supor que $s \leq 1$. Então existe um α tal que $s \in U_\alpha =]a_\alpha, b_\alpha[$. Tomemos um ponto $x \in S \cap]a_\alpha, s[$. Então

$$[0, x] \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_k}$$

Mas então s não pode ser o supremo de S porque para qualquer ponto $y \in]a_\alpha, b_\alpha[$,

$$[0, y] \subset]a_\alpha, b_\alpha[\cup U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_k}$$

$\square$

Em geral um subespaço dum espaço compacto não precisa de ser compacto:

Exemplo 3.1. $]0, 1[\subset [0, 1]$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$ logo não é compacto.

Teorema 3.6. *Seja X um espaço compacto, $Y \subset X$ fechado. Então Y é compacto.*

Demonstração. Se $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, então $X = Y^c \cup (\bigcup_\alpha U_\alpha)$ logo $X = Y^c \cup U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$. Mas então $Y \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$. $\square$

Teorema 3.7. *Seja $K \subset X$ compacto, $f : X \to Y$ contínua. Então $f(K)$ é compacto.*

Demonstração. Se $f(K) \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, então $K \subset \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$ logo $K \subset f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{\alpha_n})$. Portanto $f(K) \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$. $\square$

Teorema 3.8. *O produto $X \times Y$ de dois espaços compactos X, Y é compacto.*

Demonstração. Seja $\{U_\alpha \times V_\alpha\}$ uma cobertura aberta de $X \times Y$. Para cada x, $\{U_\alpha \times V_\alpha : x \in U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de $x \times Y$ que é compacto logo

$$x \times Y \subset U_{\alpha_1(x)} \times V_{\alpha_1(x)} \cup \ldots \cup U_{\alpha_{r_x}(x)} \times V_{\alpha_{r_x}(x)}$$

Seja $U_x = U_{\alpha_1(x)} \cap \ldots \cap U_{\alpha_{r_x}(x)}$. Então

$$U_x \times Y \subset U_{\alpha_1(x)} \times V_{\alpha_1(x)} \cup \ldots \cup U_{\alpha_{r_x}(x)} \times V_{\alpha_{r_x}(x)}$$

Como $X = \bigcup U_x$, $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$. Assim

$$X \times Y \subset U_{x_1} \times Y \cup \ldots \cup U_{x_m} \times Y$$

pelo que $\{\, U_{\alpha_i(x_j)} \times V_{\alpha_i(x_j)} \,\}$ é uma cobertura finita de $X \times Y$. $\square$

3.2. **Espaços de Hausdorff.**

Lema 3.9. *Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff, $K \subset X$ compacto e $x \notin K$. Então existem abertos disjuntos U, V tais que $x \in U$ e $K \subset V$.*

Demonstração. Para cada $y \in K$ tomamos vizinhanças $U_y \in \mathcal{V}_x$, $V_y \in \mathcal{V}_y$ disjuntas. Então $x \notin \bar{V}_y$. $K \subset \bigcup_y V_y$ logo $K \subset V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$. Seja $V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$. Então $K \subset V$ e $x \notin \bar{V} = \bar{V}_{y_1} \cup \ldots \cup \bar{V}_{y_n}$. Basta tomar então $U = \bar{V}^c$. □

Corolário 3.10. *Seja X um espaço de Hausdorff, $K \subset X$ compacto. Então K é fechado.*

Demonstração. Mostremos que K^c é aberto. Dado $x \in K^c$ existem abertos disjuntos U, V tais que $x \in U$ e $K \subset V$. Mas então $x \in U \subset K^c$. Portanto K^c é aberto. □

Corolário 3.11 (Teorema de Weierstrass). *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua, $K \subset X$ compacto. Então $f|_K$ tem máximo e mínimo em K.*

Demonstração. $\mathbb{R}$ é Hausdorff e $f(K)$ é compacto logo $f(K)$ é fechado. Como $f(K) \subset \bigcup_n]-n, n[$, existe um N tal que $f(K) \subset]-N, N[$. Agora basta recordar que um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado e fechado tem máximo e mínimo. □

Corolário 3.12. *Seja Y um espaço compacto e X um espaço de Hausdorff. Então uma função $f : X \to Y$ contínua e injectiva é um mergulho.*

Demonstração. Mostremos que $f^{-1} : f(X) \to X$ é contínua. Seja $F \subset X$ um fechado. Então F é compacto logo $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ é compacto. Como $f(X)$ é de Hausdorff, $f(F)$ é fechado. Portanto f^{-1} é contínua logo f é um homeomorfismo. □

3.3. **Espaços sequencialmente compactos e a propriedade de Bolzano-Weierstrass.** Recordemos a noção de sublimite:

Definição 3.13. Um ponto $x \in X$ é um sublimite duma sucessão (x_n) sse

$$\underset{U \in \mathcal{V}_x}{\forall} \ \underset{N > 0}{\forall} \ \underset{n > N}{\exists} \ x_n \in U$$

Definição 3.14. X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass sse qualquer sucessão (x_n) tiver um sublimite.

Teorema 3.15. *Um espaço compacto tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.*

Demonstração. Provemos por redução ao absurdo. Vamos supor que X não tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass. Então para cada ponto $x \in X$ existe uma vizinhança $U_x \in \mathcal{V}_x$ e um natural N_x tal que $x_n \notin U_x$ para $n > N_x$. Então $X = \bigcup U_x$. Se X for compacto, existem $x_1, \ldots, x_k$ tal que $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. Mas então, para $n > \max\{N_{x_i}\}$, $x_n \notin X$ o que é absurdo. □

Existe uma relação estreita entre a noção de sublimite e a noção de subsucessão:

Definição 3.16. Seja (x_n) uma sucessão. Dizemos que (y_k) é uma subsucessão de (x_n) sse existir uma sucessão $(n_k) \in \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $y_k = x_{n_k}$.

Proposição 3.17. *Seja (x_n) uma sucessão.*

(1) *Se x for um limite duma subsucessão (x_{n_k}), então x é um sublimite de (x_n).*

(2) *Se X tiver o primeiro axioma de numerabilidade e x for um sublimite da (x_n) então existe uma subsucessão (x_{n_k}) com limite x.*

Demonstração. (1) fica como exercício. Para demonstrar (2), seja $\{U_n\}$ uma base contável de $\mathcal{V}_x$ e seja $B_n = U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Escolhemos n_1 tal que $x_{n_1} \in B_1$. Assumindo escolhidos $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, tomamos $n_{k+1} > n_k$ tal que $x_{n_{k+1}} \in B_{k+1}$. Então a subsucessão (x_{n_k}) converge para x. □

Definição 3.18. X é sequencialmente compacto sse qualquer sucessão (x_n) tiver uma subsucessão convergente.

Claramente,

Teorema 3.19. *Seja X um espaço com o primeiro axioma de numerabilidade. Então X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass sse X for sequencialmente compacto.*

Observação. Existem espaços compactos que não são sequencialmente compactos. Veremos um exemplo quando falarmos do teorema de Tychonoff.

Exercício 3.3. Mostre que o teorema de Weierstrass é válido em espaços sequencialmente compactos.

3.4. **Compacidade em espaços métricos.** A primeira observação é que um espaço métrico X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass sse for sequencialmente compacto. Temos também

Teorema 3.20. *Um espaço métrico X sequencialmente compacto é completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sucessão de Cauchy, x um sublimite. Então, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $N > 0$ tal que $n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $k > N$ tal que $x_k \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Então, para $n > N$,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_k) + d(x_k, x) < \varepsilon$$

Logo $x_n \to x$. □

Definição 3.21. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X. Dizemos que $\delta > 0$ é um número de Lebesgue da cobertura $\{U_\alpha\}$ sse

$$\underset{x \in X}{\forall} \; \underset{\alpha}{\exists} \; B_\delta(x) \subset U_\alpha$$

Claramente, se δ é um número de Lebesgue da cobertura, qualquer conjunto de diâmetro menor que δ está contido num dos U_α.

Uma das consequências mais importantes da propriedade de Bolzano-Weierstrass em espaços métricos é a existência do número de Lebesgue de qualquer cobertura:

Teorema 3.22 (Número de Lebesgue)**.** *Seja X um espaço métrico com a propriedade de Bolzano-Weierstrass. Então qualquer cobertura $\{U_\alpha\}$ de X tem um número de Lebesgue $\delta > 0$.*

Demonstração. Provemos por redução ao absurdo. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura sem número de Lebesgue. Então

$$\underset{\delta > 0}{\forall} \; \underset{x \in X}{\exists} \; \underset{\alpha}{\forall} \; B_\delta(x) \not\subset U_\alpha$$

Para cada n existe portanto um x_n tal que a bola $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ não está contida em nenhum U_α. Seja x um sublimite de (x_n). Então $x \in U_\beta$ para algum β logo existe uma bola $B_\varepsilon(x) \subset U_\beta$. Escolhamos N tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Existe um $n > N$ tal que $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Mas então

$$B_{\frac{1}{n}}(x_n) \subset B_\varepsilon(x) \subset U_\beta$$

o que é uma contradição. □

Como aplicação típica provaremos o

Teorema 3.23 (Heine-Cantor). *Sejam X, Y espaços métricos, X com a propriedade de Bolzano-Weierstrass, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Queremos mostrar que

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x,y\in X}{\forall}\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(\,f(x), f(y)\,) < \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$, $Y = \bigcup_{z\in Y} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ logo $X = f^{-1}(Y) = \bigcup_{z\in Y} f^{-1}\left(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)\right)$. Seja δ um número de Lebesgue desta cobertura. Então,

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow y \in B_\delta(x) \Rightarrow \underset{z\in Y}{\exists}\ f(x), f(y) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\ \Rightarrow d(\,f(x), f(y)\,) < \varepsilon \quad \square$$

Definição 3.24. Dizemos que um espaço métrico X é totalmente limitado sse para qualquer $\delta > 0$ X puder ser coberto por um número finito de bolas de raio δ, isto é, se existirem pontos $x_1, \ldots, x_m$ tais que

$$X \subset B_\delta(x_1) \cup \ldots \cup B_\delta(x_m)$$

Exercício 3.4. Mostre que um espaço totalmente limitado é limitado.

Exemplo 3.2. Seja $\mathbb{R}^\infty$ o conjunto das sucessões em $\mathbb{R}$ que são 0 a partir de certa ordem. Definimos a distância

$$d(\,(x_n), (y_n)\,) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2 + \ldots}$$

Seja $e_k \in \mathbb{R}^\infty$ a sucessão com o termo de ordem k igual a 1 e todos os outros termos iguais a zero. Então o conjunto $\{e_k\}$ é limitado mas $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ para $i \neq j$ logo o conjunto não é totalmente limitado.

Teorema 3.25. *Seja X um espaço métrico. São equivalentes*

(1) *X é compacto*
(2) *X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass*
(3) *X é sequencialmente compacto*
(4) *X é completo e totalmente limitado*

Demonstração. Já mostrámos que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

(2) $\Rightarrow$ (4) Já mostrámos que sequencialmente compacto implica completo. Vamos supor que X não é totalmente limitado. Então

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{x_1,\ldots,x_n}{\forall}\ X \neq B_\varepsilon(x_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(x_n)$$

Construimos recursivamente uma sucessão: assumindo escolhidos os primeiros $n-1$ termos $x_1, \ldots, x_{n-1}$, escolhemos

$$x_n \in X - (\,B_\varepsilon(x_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(x_{n-1})\,)$$

Como para $i \neq j$, $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, $\{x_n\}$ não tem sublimites.

(2) $\Rightarrow$ (1) Dada uma cobertura $\{U_\alpha\}$ aberta de X seja δ o seu número de Lebesgue. Como X é totalmente limitado,

$$X = B_\delta(x_1) \cup \ldots \cup B_\delta(x_m)$$

e para cada bola existe um α_i tal que $B_\delta(x_i) \subset U_{\alpha_i}$. Logo

$$X = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_m}$$

logo X é compacto.

(4) $\Rightarrow$ (3) Seja (x_n) uma sucessão em X. Começamos por escrever $X = B_1(x_1) \cup \ldots \cup B_1(x_k)$ e escolhemos um das bolas $B_1 = B_1(x_i)$ tal que $\#\{n : x_n \in B_1\} = \infty$. Tomamos $x_{n_1} \in B_1$. Agora, o subespaço B_1 é totalmente limitado logo $B_1 = B_{\frac{1}{2}}(y_1) \cup \ldots \cup B_{\frac{1}{2}}(y_m)$. Tomamos uma das bolas $B_{\frac{1}{2}} = B_{\frac{1}{2}}(y_j)$ tal que $\#\{n : x_n \in B_{\frac{1}{2}}\} = \infty$. Escolhemos $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}} \subset B_1$. Continuamos, definindo recursivamente uma subsucessão (x_{n_k}). Agora $\{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \ldots\} \subset B_{\frac{1}{k}}$ logo $\operatorname{diam}\{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \ldots\} < \frac{2}{k}$ pelo que (x_{n_k}) é uma sucessão de Cauchy. Como X é completo, (x_{n_k}) converge. □

3.5. **Espaços localmente compactos e compactificações.** Vimos que, dado um espaço métrico X, existe um espaço métrico completo Y e um mergulho isométrico $f : X \to Y$ tal que $f(X)$ é denso em Y. Existe uma construção semelhante chamada compactificação em que mergulhamos um espaço topológico X num espaço compacto de Hausdorff Y. Para esta construção ser possível, claramente X tem que ser um espaço de Hausdorff. Além disso, é necessário que X seja localmente compacto:

Definição 3.26. Dizemos que um espaço topológico X é localmente compacto sse para todo o x existir um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $\bar{U}$ é compacto.

Exercício 3.5. Mostre que X é localmente compacto sse para todo o x existir um compacto K tal que $x \in \operatorname{int} K$.

Teorema 3.27. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então existe um espaço de Hausdorff compacto Y e um mergulho aberto $f : X \to Y$ (isto é, $f(U)$ é aberto se U for aberto) tal que $Y - f(X)$ tem exactamente um ponto.*

Chamamos a Y a compactificação de Alexandroff de X.

Demonstração. Seja $Y = X \cup \{\infty\}$, $f : X \to Y$ a inclusão. Definimos os abertos de Y por

- Se $\infty \in A$, $A \in \tau_Y \Leftrightarrow Y - A \subset X$ é compacto
- Se $\infty \notin A$, $A \in \tau_X \Leftrightarrow A \in \tau_Y$

Claramente $A \in \tau_X \Rightarrow A \in \tau_Y$. Isto mostra que f é aberta. Mostremos que f é contínua, isto é, $A \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(A) = A \cap X \in \tau_X$. Isto é claro se $\infty \notin A$. Se $\infty \in A$ então $X - (A \cap X) = Y - A$ é compacto. Como X é Hausdorff, $X - (A \cap X)$ é fechado em X logo $A \cap X \in \tau_X$.

Mostremos agora que τ_Y é uma topologia. Claramente $Y, \emptyset \in \tau_Y$.

- Seja $\{A_\alpha\}$ uma colecção de abertos de Y, $A = \bigcup A_\alpha$.
  Se $\infty \notin A$ então
  $$A = A \cap X = \bigcup_\alpha (A_\alpha \cap X)$$
  Como $A_\alpha \cap X \in \tau_X$, $A \in \tau_X$ logo $A \in \tau_Y$.

Se $\infty \in A$, então existe um α tal que $\infty \in A_\alpha$ logo $Y - A_\alpha \subset X$ é compacto. Como $Y - A \subset Y - A_\alpha$, para mostrar que $Y - A$ é compacto basta mostrar que $Y - A$ é fechado em X. Ora $X - (Y - A) = X \cap A \in \tau_X$ logo $X - A$ é fechado em X.

- Sejam $A_1, A_2 \in \tau_Y$, $A = A_1 \cap A_2$.
  Se $\infty \notin A$ então $A = A \cap X = (A_1 \cap X) \cap (A_2 \cap X)$. Como $A_i \cap X \in \tau_X$, $A \in \tau_X$ logo $A \in \tau_Y$.
  Se $\infty \in A$ então $\infty \in A_1$ e $\infty \in A_2$ logo $Y - A_1, Y - A_2$ são compactos. Mas então $Y - A = (Y - A_1) \cup (Y - A_2)$ é compacto logo $A \in \tau_Y$.

Falta mostrar que X é compacto de Hausdorff.

- Hausdorff: Sejam $x, y \in Y$. Se $x, y \in X$ existem abertos disjuntos $U, V \in \tau_X$ contendo x e y. Mas então $U, V \in \tau_Y$. Seja agora $x \in X$, $y = \infty$. Como X é localmente compacto, existe um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $\bar{U}$ é compacto. Seja $V = Y - \bar{U}$. Então $U, V \in \tau_Y$ são abertos disjuntos contendo x, ∞.
- Compacto: Se $Y = \bigcup U_\alpha$, então existe um β tal que $\infty \in U_\beta$ logo $Y - U_\beta$ é compacto. Como $Y - U_\beta \subset \bigcup U_\alpha$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $Y - U_\beta \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$. Logo $Y = U_\beta \cup (Y - U_\beta) = U_\beta \cup U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$. □

Mostramos agora que num espaço de Hausdorff localmente compacto é possível encontrar vizinhanças dum ponto com fecho compacto arbitrariamente pequeno:

Teorema 3.28. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então, para qualquer x e qualquer $V \in \mathcal{V}_x$ existe um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $\bar{U} \subset V$ e $\bar{U}$ é compacto.*

Demonstração. Seja Y a compactificação de Alexandroff de X. Pensamos em Y como X com um ponto adicionado. Então, dado $V \in \mathcal{V}_x^X$, $Y - V = V^c$ é fechado em Y, logo compacto, e $x \notin V^c$. Assim, existem abertos U, W tais que

$$x \in U. \quad U \cap W = \emptyset \quad V^c \subset W$$

o que é equivalente a

$$x \in U, \quad U \subset W^c \quad W^c \subset V$$

Como W^c é fechado, $\bar{U} \subset W^c \subset V$. Como Y é compacto, $\bar{U}$ é compacto. Como $U \subset V \subset X$, U é aberto em X. □

Finalmente vamos mostrar que um espaço de Hausdorff localmente compacto é um espaço de Baire. A demonstração é essencialmente a mesma que para espaços métricos completos. Nesses espaços a intersecção duma família de fechados encaixados de diâmetro a tender para zero é não vazia. Aqui usaremos o seguinte resultado sobre espaços compactos:

Definição 3.29. Dizemos que uma família de conjuntos $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tem a propriedade de intersecção finita (PIF) sse

$$\underset{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I}{\forall} Y_{\alpha_1} \cap \ldots \cap Y_{\alpha_n} \neq \emptyset$$

Teorema 3.30. *Um espaço X é compacto sse para qualquer família $\{Y_\alpha\}$ se subconjuntos de X com a PIF se tiver $\bigcap_\alpha \bar{Y}_\alpha \neq \emptyset$*

Demonstração. Um espaço X é compacto sse, para qualquer família de abertos $\{A_\alpha\}$,

$$\left(X = \bigcup_\alpha A_\alpha \right) \Longrightarrow \left(\underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\exists} X = A_{\alpha_1} \cup \ldots \cup A_{\alpha_n} \right)$$

Passando ao complementar, X é compacto sse, para qualquer família de fechados $\{F_\alpha\}$,

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset \right) \Longrightarrow \left(\underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\exists} F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n} = \emptyset \right)$$

Passando ao contrarecíproco obtemos

$$\{F_\alpha\} \text{ tem a PIF} \Longrightarrow \bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$$

Isto é equivalente ao resultado do teorema: basta observar que se $\{Y_\alpha\}$ tem a PIF, então $\{\bar{Y}_\alpha\}$ também tem a PIF. □

Podemos agora demonstrar

Teorema 3.31. *Um espaço de Hausdorff localmente compacto é um espaço de Baire.*

Demonstração. Mostraremos que a intersecção duma família numerável $\{A_n\}_n$ de abertos densos é densa. Seja $U \in \tau$. Mostremos que $U \cap \bigcap A_n \neq \emptyset$.

Como A_1 é denso, $U \cap A_1 \neq \emptyset$. Logo existe um aberto B_1 tal que $\bar{B}_1$ é compacto e $\bar{B}_1 \subset U \cap A_1$. Agora $B_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ logo escolhemos um aberto B_2 tal que $\bar{B}_2 \subset B_1 \cap A_2$. Continuamos, construindo abertos B_n com $\bar{B}_n \subset B_{n-1} \cap A_n$. Então $\{B_n\}$ é uma família de conjuntos no compacto $\bar{B}_1$ com a PIF. Portanto existe um ponto $x \in \bigcap \bar{B}_n \subset \bigcap A_n$. Logo $x \in U \cap \bigcap A_n \neq \emptyset$. □

4. Topologia produto

4.1. **Subbases.** Antes de falarmos de produtos de espaços é conveniente abordar a seguinte questão: dada uma colecção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X, como definir a topologia em X "gerada" pela colecção $\mathcal{S}$?

Definição 4.1. Dadas duas topologias τ, τ' num conjunto X, dizemos que τ é mais grossa, ou mais fraca que τ' sse $\tau \subset \tau'$. Dizemos que τ é mais fina, ou mais forte que τ' sse $\tau \supset \tau'$.

A topologia gerada por uma coleção de conjuntos $\mathcal{S}$ é a topologia mais fraca contendo $\mathcal{S}$:

Definição 4.2. Dada uma colecção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X, dizemos que τ_s é a topologia gerada por $\mathcal{S}$ sse para qualquer topologia τ, $\mathcal{S} \subset \tau \Rightarrow \tau_s \subset \tau$. Dizemos então que $\mathcal{S}$ é uma subbase de τ_s.

Exercício 4.1. Seja $\mathcal{B}$ uma base duma topologia τ. Mostre que τ é a topologia gerada por $\mathcal{B}$.

Exercício 4.2. Sejam $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ subbases de τ_1, τ_2 respectivamente tais que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \tau_1$. Mostre que $\tau_1 = \tau_2$.

τ_s existe para qualquer colecção $\mathcal{S}$:

Teorema 4.3. *Para qualquer colecção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X, a topologia $\tau_{\mathcal{S}}$ gerada por $\mathcal{S}$ existe. A colecção*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{ S_1 \cap \ldots \cap S_k \, : S_i \in \mathcal{S} \} \cup \{X\}$$

formada por intersecções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma base de $\tau_{\mathcal{S}}$.

Demonstração. Apliquemos o teorema 1.28: a condição (i) segue de $X \in \mathcal{B}$ e a condição (ii) de $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Seja τ_s a topologia com base $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Mostremos que τ_s é a topologia mais fraca contendo $\mathcal{S}$. Seja $\tau \supset \mathcal{S}$ uma topologia. Então $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subset \tau$ (intersecções finitas de abertos são abertas). Seja $A \in \tau_s$. Então, pelo teorema 1.26 $A = \bigcup_\alpha B_\alpha$ com $B_\alpha \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subset \tau$ pelo que $A \in \tau$. Logo $\tau_s \subset \tau$. □

Exercício 4.3. Mostre que a intersecção duma família de topologias sobre X é uma topologia sobre X. Mostre que a topologia gerada por $\mathcal{S}$ é a intersecção de todas as topologias contendo $\mathcal{S}$.

Subbases podem ser usadas para estudar continuidade de funções ou convergência de sucessões:

Teorema 4.4. *Sejam X, Y espaços topológicos, $\mathcal{S}$ uma subbase de Y. Então uma função $f : X \to Y$ é contínua sse para qualquer $S \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(S)$ é aberto.*

Demonstração. Para qualquer $B = S_1 \cap \ldots \cap S_k \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$, $f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(S_k)$ é aberto logo f é contínua. □

Teorema 4.5. *Seja X um espaço topológico, $\mathcal{S}$ uma subbase de X. Então uma sucessão (x_n) converge para x sse*

$$\underset{S \in \mathcal{S}}{\forall} \; \underset{N}{\exists} \; n > N \Rightarrow x_n \in S$$

Demonstração. Seja $B = S_1 \cap \ldots \cap S_k \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ uma vizinhança de x. Então para cada i existe um N_i tal que $n > N_i \Rightarrow x_n \in S_i$. Tomando $n = \max\{N_i\}$ temos $n > N \Rightarrow x_n \in B$. Logo $x_n \to x$. □

4.2. **Produtos de espaços.**

Definição 4.6. Dada uma família $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de conjuntos o produto $X = \prod_\alpha X_\alpha$ é o conjunto das funções $f : I \to \bigcup_\alpha X_\alpha$ tais que $f(\alpha) \in X_\alpha$. Para cada $\beta \in I$ definimos a projecção $\pi_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ por $\pi_\beta(f) = f(\beta)$.

Normalmente escrevemos $f(\alpha) = x_\alpha$ e representamos o elemento $f \in \prod X_\alpha$ por $f = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Exemplo 4.1. O produto $X_1 \times X_2$ é o conjunto das funções $f : \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2$ tais que $f(1) = x_1 \in X_1$ e $f(2) = x_2 \in X_2$. Representamos f por (x_1, x_2). As projecções são então $\pi_1(x_1, x_2) = f(1) = x_1$ e $\pi_2(x_1, x_2) = f(2) = x_2$.

Seja agora $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ uma família de espaços topológicos. Vamos definir uma topologia no produto $\prod X_\alpha$: a topologia de Tychonoff é a topologia mais fraca tal que as projecções $\pi_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ são contínuas:

Definição 4.7. A topologia produto, ou de Tychonoff, é a topologia τ_s gerada pela subbase $\mathcal{S} = \{\pi_\alpha^{-1}(A) \, : \, \alpha \in I, \, A \in \tau_\alpha\}$.

Exercício 4.4. Mostre que $\pi_\beta^{-1}(A) = A \times \prod\limits_{\alpha \neq \beta} X_\alpha$.

Exercício 4.5. Seja $X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ as projecções na primeira e segunda coordenadas. Mostre que $\pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) = A_1 \times A_2$. Conclua que $\mathcal{S}$ não é uma base de nenhuma topologia sobre $\mathbb{R}^2$.

É conveniente ter uma base para a topologia de Tychonoff:

Proposição 4.8. *A colecção de conjuntos*

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha\in I} U_\alpha \ : U_\alpha \in \tau_\alpha,\ U_\alpha = X_\alpha \text{ excepto para um número finito de índices} \right\}$$

é uma base para a topologia de Tychonoff, $\tau_{\mathcal{S}}$.

Demonstração. Seja

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{\, S_1 \cap \ldots \cap S_k \ : S_i \in \mathcal{S} \,\} \cup \{X\}$$

Basta mostrar que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Para mostrar que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ basta observar que

$$x \in \prod_{\alpha\in I} U_\alpha \Leftrightarrow \underset{\alpha\in I}{\forall}\ \pi_\alpha(x) \in U_\alpha \Leftrightarrow \underset{\alpha\in I}{\forall}\ x \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \Leftrightarrow x \in \bigcap_\alpha \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$$

Seja agora $B = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(U_k)$ com $U_i \subset X_{\alpha_i}$ aberto. Definimos, para cada α

$$V_\alpha = \begin{cases} \displaystyle\bigcap_{\alpha=\alpha_i} U_i & \text{se existir um } i \text{ tal que } \alpha = \alpha_i \\ X_\alpha & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então

$$x \in B \Leftrightarrow x \in \bigcap_\alpha \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \Leftrightarrow x \in \prod_{\alpha\in I} V_\alpha$$

Isto mostra que $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{B}$. □

Teorema 4.9. *Uma função $f : Y \to \prod_\alpha X_\alpha$ é contínua sse $\underset{\alpha}{\forall}\ \pi_\alpha \circ f$ for contínua.*

Demonstração. Numa direcção é a continuidade da composta. Na outra direcção, usamos o teorema 4.4. Seja $S = \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) \in \mathcal{S}$. Então $f^{-1}(S) = f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)) = (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(A_\alpha)$ que é aberto. Logo f é contínua. □

Teorema 4.10. *Sejam $A_\alpha \subset X_\alpha$. Então*

$$\overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha} = \prod_{\alpha\in I} \bar{A}_\alpha$$

Demonstração.

- ($\subset$) Seja $x \in \overline{\prod A_\alpha}$. Então existe uma rede $x_\nu \to x$ com $x_\nu \in \prod A_\alpha$ logo $\pi_\alpha(x_\nu) \in A_\alpha$ e $\pi_\alpha(x_\nu) \to \pi_\alpha(x)$. Portanto $\pi_\alpha(x) \in \bar{A}_\alpha$ logo $x \in \prod \bar{A}_\alpha$.
- ($\supset$) Seja $x \in \prod \bar{A}_\alpha$. Dado $\prod U_\alpha \in \mathcal{V}_x$, $\pi_\alpha(x) \in U_\alpha$ logo $U_\alpha \cap A_\alpha \neq \emptyset$. Mas então $\prod U_\alpha \cap \prod A_\alpha = \prod (U_\alpha \cap A_\alpha) \neq \emptyset$. Concluímos que $x \in \overline{\prod A_\alpha}$. □

Teorema 4.11. *Uma sucessão (x_n) em X converge para x sse $\underset{\alpha}{\forall}\ \pi_\alpha(x_n) \to \pi_\alpha(x)$.*

Demonstração. Se $x_n \to x$ então $\pi_\alpha(x_n) \to \pi_\alpha(x)$ por continuidade de π_α. Assumimos agora que $\pi_\alpha(x_n) \to \pi_\alpha(x)$ para todo o α. Aplicando o teorema 4.5, seja $S = \pi_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{S}$, $x \in S$. Então $\pi_\alpha(x) \in U$, ou seja $U \in \mathcal{V}_{\pi_\alpha(x)}$. Logo $\pi_\alpha(x_n) \in U$ eventualmente pelo que $x_n \in \pi_\alpha^{-1}(U) = S$ eventualmente. Portanto $x_n \to x$. □

4.3. **O teorema de Tychonoff.** Vamos agora mostrar que o produto de espaços compactos é compacto. Para tal é conveniente usar a formulação da compacidade usando a propriedade da intersecção finita (PIF).

Definição 4.12. Uma família de conjuntos $\mathcal{D}\{Y_\alpha\}$ com a PIF diz-se maximal sse para qualquer família $\hat{\mathcal{D}} \supset \mathcal{D}$,

$$\hat{\mathcal{D}} \text{ tem a PIF} \Longrightarrow \hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$$

Teorema 4.13. *Um espaço topológico X é compacto sse para qualquer família $\{Y_\alpha\}$ com a PIF e maximal, $\bigcap Y_\alpha = \emptyset$*

Demonstração. Basta ver a implicação ($\Leftarrow$). Para tal precisamos dum resultado de teoria dos conjuntos que não demonstraremos aqui: se $\{C_\alpha\}$ é uma família de conjuntos com a PIF então existe uma família maximal $\{Y_\alpha\}$ comtendo $\{C_\alpha\}$. Agora o resultado é imediato:

$$\bigcap_\beta C_\beta \supset \bigcap_\alpha Y_\alpha \neq \emptyset$$

logo $\bigcap C_\beta \neq \emptyset$. □

A vantagem de usar famílias maximais advém do seguinte lema:

Lema 4.14. *Seja $\mathcal{D}$ uma família com a PIF e maximal.*

(1) *Se $Y_1, Y_2 \in \mathcal{D}$ então $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{D}$*
(2) *Se para todo o $Y \in \mathcal{D}$, $W \cap Y \neq \emptyset$ então $W \in \mathcal{D}$*

Demonstração.

(1) Seja $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \{Y_1 \cap Y_2\}$. Então $\hat{\mathcal{D}}$ tem a PIF logo $Y_1 \cap Y_2 \in \hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$.
(2) Seja $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup W$. Mostremos que $\hat{\mathcal{D}}$ tem a PIF: sejam $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{D}$. Então, por (1), $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \in \mathcal{D}$ logo $W \cap Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \neq \emptyset$. Logo $\hat{\mathcal{D}}$ tem a PIF e portanto $W \in \hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$. □

Vamos então provar o teorema de Tychonoff:

Teorema 4.15 (Tychonoff)**.** *Seja $\{X_\mu\}$ uma família de espaços topológicos compactos. Então $X = \prod X_\mu$ é compacto.*

Demonstração. Seja $\{Y_\alpha\}$ uma família de subconjuntos de X com a PIF e maximal. Queremos mostrar que $\bigcap Y_\alpha \neq \emptyset$.

Começamos por mostrar que, para qualquer μ, a família $\{\pi_\mu(Y_\alpha)\}_\alpha$ tem a PIF. Para tal basta observar que, para qualquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$,

$$\pi_\mu(Y_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_\mu(Y_{\alpha_n}) \supset \pi_\mu(Y_{\alpha_1} \cap \ldots \cap Y_{\alpha_n}) \neq \emptyset$$

Como X_μ é compacto, $\bigcap_\alpha \overline{\pi_\mu(Y_\alpha)} \neq \emptyset$. Tomemos um ponto $x_\mu \in \bigcap \overline{\pi_\mu(Y_\alpha)}$. Seja $x = (x_\mu)$ o ponto com coordenadas x_μ. Basta mostrar que $x \in \bigcup_\alpha \bar{Y}_\alpha$, ou seja, para qualquer $\alpha \in I$, $x \in \bar{Y}_\alpha$, ou seja,

$$\forall_{\alpha \in I} \ \forall_{B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_x} \ B \cap Y_\alpha \neq \emptyset$$

(1) Primeiro assumimos que $S \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}_x$. Então $S = \pi_\mu^{-1}(V)$ com V um aberto em X_μ, $x_\mu \in V$. Como $x_\mu \in \overline{\pi_\mu(Y_\alpha)}$, $V \cap \pi_\mu(Y_\alpha) \neq \emptyset$. Mas

$$V \cap \pi_\mu(Y_\alpha) \neq \emptyset \Leftrightarrow \pi_\mu(Y_\alpha) \not\subset V^c \Leftrightarrow Y_\alpha \not\subset \pi_\mu^{-1}(V^c) = S^c \Leftrightarrow Y_\alpha \cap S \neq \emptyset$$

como queríamos demonstrar.

(2) Provamos agora o resultado para $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_x$. Sabemos que $B = S_1 \cap \ldots \cap S_n$ com $S_i \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}_x$. Agora observamos que, como $\{Y_\alpha\}$ é maximal, a condição $S_i \cap Y_\alpha \neq \emptyset$ para qualquer α implica $S_i \in \{Y_\alpha\}$. Mas então $B \in \{Y_\alpha\}$ porque é a intersecção finita de elementos de $\{Y_\alpha\}$. Mas isto implica, pela PIF, que $B \cap Y_\alpha \neq \emptyset$ para qualquer α. Isto termina a demonstração. □

5. Espaços de funções

5.1. A topologia da convergência pontual. Vimos que o produto $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ é o conjunto das funções $f : I \to \bigcup X_\alpha$ tais que $f(\alpha) \in X_\alpha$. Se $X_\alpha = X$ para todo o α, o produto $\prod_{\alpha \in I} X$ é simplesmente o conjunto das funções $f : I \to X$. É comum usar a notação X^I para este conjunto.

Se X for um espaço topológico, a topologia de Tychonoff em X^I corresponde à convergência pontual de funções:

Teorema 5.1. *Com a topologia de Tychonoff, uma sucessão de funções $f_n : I \to X$ converge para uma função f sse para todo o $\alpha \in I$, $f_n(\alpha) \to f(\alpha)$*

Demonstração. Basta observar que $\pi_\alpha(f_n) = f_n(\alpha)$ e aplicar o resultado já demonstrado sobre convergência de sucessões. □

Aproveitamos, tal como prometido, para dar um exemplo dum espaço compacto que não é sequencialmente compacto:

Exemplo 5.1. Seja $X = [0,9]^{\mathbb{R}}$. Pelo teorema de Tychonoff, X é compacto. Definimos uma sucessão (f_n) em X da seguinte maneira: dado $x \in \mathbb{R}$ escrevemos x em forma de dízima[1]

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k} \text{ com } a_0 \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq a_k \leq 9$$

ou seja $x = a_0.a_1a_2a_3\ldots$. Definimos $f_n(x) = a_n$. Seja f_{n_k} uma subsucessão. Definimos

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se existir um } k \text{ tal que } n = n_k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$. Então $f_{n_k}(x) = (-1)^k$ não converge logo f_{n_k} não converge.

5.2. Topologia uniforme. Dado um espaço métrico $(X.d)$, introduzimos no exemplo 1.13 a métrica uniforme no espaço $\mathcal{B}(I,X)$ das funções limitadas $f : I \to X$. Se substituirmos a métrica d pela métrica limitada $\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$, então qualquer função é limitada pelo que $\mathcal{B}(I,X) = X^I$:

Definição 5.2. Seja (X,d) um espaço métrico. Dado um conjunto I definimos a métrica uniforme em X^I através de

$$\rho(f,g) = \sup_{\alpha \in I} \bar{d}(\, f(\alpha)\,,\, g(\alpha)\,)$$

[1] Para obter unicidade é necessário excluir a situação $a_0.a_1a_2\ldots a_k999999\ldots$

Então o teorema 2.4 é válido: se (X, d) é um espaço métrico completo então $(X, \bar{d})$ também é completo logo X^I é completo.

Vamos agora focar a nossa atenção nas funções contínuas. Seja (X, τ) um espaço topológico, (Y, d) um espaço métrico. Denotamos por $\mathcal{C}(X, Y) \subset Y^X$ o subespaço das funções contínuas $f : X \to Y$.

Teorema 5.3. *O subespaço $\mathcal{C}(X, Y) \subset Y^X$ das funções contínuas $f : X \to Y$ é fechado.*

Demonstração. Seja f_n uma sucessão de funções contínuas convergindo para uma função f. Basta mostrar que f é contínua. Seja $x \in X$. f é contínua em x sse

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{U \in \mathcal{V}_x}{\exists} \ y \in U \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

Como $f_n \to f$ existe um n tal que $\forall_w d(f_n(w), f(w)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Como f_n é contínua, existe um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $y \in U \Rightarrow d(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Logo, se $y \in U$,

$$d(f(y), f(x)) \leq d(f(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \qquad \square$$

Corolário 5.4. *Se Y for um espaço métrico completo, então $\mathcal{C}(X, Y)$ é completo.*

Demonstração. Exercício. $\square$

5.3. **Topologia compacta aberta. O teorema de Ascoli-Arzelá.** Ver Munkres, secções 46 e 47.

6. Funções reais em espaços topológicos

6.1. **Axiomas de separação.** Já vimos dois axiomas de separação. X é T1 sse os pontos são fechados. X é T2 sse é Hausdorff.

Definição 6.1. Seja (X, τ) um espaço topológico.

- X é regular sse X é T1 e dados um fechado F e $x \notin F$, existem abertos disjuntos U, V tais que $x \in U$, $F \subset V$.
- X é normal sse X é T1 e dados fechados disjuntos F_1, F_2 existem abertos disjuntos U_1, U_2 com $F_i \subset U_i$.

Exercício 6.1. Mostre que $T4 \Rightarrow T3 \Rightarrow T2 \Rightarrow T1$.

Proposição 6.2. *Seja X um espaço topológico. Então*

(1) *X é regular sse X é T1 e*

$$\underset{x \in X}{\forall} \ \underset{U \in \mathcal{V}_x}{\forall} \ \underset{V \in \mathcal{V}_x}{\exists} \ \bar{V} \subset U$$

(2) *X é normal sse X é T1 e, dado um fechado F e um aberto U contendo F, existe um aberto V tal que $F \subset V \subset \bar{V} \subset U$.*

Demonstração. Demonstremos (1) primeiro:

$\Rightarrow$ Dados $x \in X$, $U \in \mathcal{V}_x$, $x \notin U^c$ logo existem V, W abertos tais que

$$x \in V, \ U^c \subset W, \ V \cap W = \emptyset$$

$V \cap W = \emptyset \Leftrightarrow V \subset W^c \Rightarrow \bar{V} \subset W^c$. Logo $x \in V \subset \bar{V} \subset W^c \subset U$.

$\Rightarrow$ Dado um fechado F e $x \notin F$, $F^c \in \mathcal{V}_x$ logo existe um $V \in \mathcal{V}_x$ com $\bar{V} \subset F^c$, ou seja, $F^c \subset \bar{V}^c$. Basta agora observar que $U, \bar{V}^c$ são abertos disjuntos.

A demonstração de (2) é idêntica. $\square$

Corolário 6.3. *Um espaço localmente compacto de Hausdorff é regular.*

Teorema 6.4. *Seja (X,τ) um espaço Lindelöf regular. Então X é normal.*

Demonstração. Sejam F, G fechados disjuntos. Para cada $x \in F$ e $y \in G$ escolhemos $U_x \in \mathcal{V}_x$ e $V_y \in \mathcal{V}_y$ tais que

$$\bar{U}_x \cap G = \emptyset,\ \bar{V}_x \cap F = \emptyset$$

Como F, G são Lindelöf (exercício), $F \subset \bigcup U_x$ e $G \subset \bigcup V_y$, temos

$$F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{x_n},\ G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{y_n}$$

Definimos

$$\tilde{U}_n = U_{x_n} - \left(\bar{V}_{y_1} \cup \ldots \cup \bar{V}_{y_n}\right),\ \tilde{V}_n = V_{y_n} - \left(\bar{U}_{x_1} \cup \ldots \cup \bar{U}_{x_n}\right)$$

Falta mostrar que

(i) $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_n$

(ii) $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n$

(iii) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_n\right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{V}_m\right) = \emptyset$

Seja $x \in F$. Então $\forall_m\, x \notin \bar{V}_{y_m}$. Logo $x \in U_{x_n} \Rightarrow x \in \tilde{U}_{x_n}$. Isto mostra (i) e, por simetria, (ii). Seja $x \in \left(\bigcup \tilde{U}_n\right) \cap \left(\bigcup \tilde{V}_m\right)$. Então existem n, m tais que $x \in \tilde{U}_n$ e $x \in \tilde{V}_m$. Podemos supor que $n \geq m$. Então $x \in \tilde{U}_n \Rightarrow x \notin \bar{V}_{y_m}$. Mas $\tilde{V}_m \subset \bar{V}_{y_m}$ o que é uma contradição. Isto prova (iii). □

Teorema 6.5. *Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Então X é normal.*

Demonstração. X é Lindelöf logo basta mostrar que X é regular. Mas um fechado $F \subset X$ é compacto logo isto segue do lemma 3.9. □