TGIAF TPC #13 (PARA ENTREGAR)

p366 #4 (prove as suas afirmações), 7ac

Exercício 1. *Seja* $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ *o toro,* $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$ *o revestimento dado por* $p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$*. Seja* A *uma matriz* 2×2 *de entradas inteiras.*

(1) *Mostre que* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *induz uma função contínua* $\tilde{A} : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *tal que* $p \circ A = \tilde{A} \circ p$.
(2) *Mostre que se* $\det A = \pm 1$ *então* $\tilde{A}$ *é um homeomorfismo.*
(3) *Seja* $B^2 = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$*. Sejam* $C_1 = B^2 \times S^1$, $C_2 = S^1 \times B^2$ *toros sólidos,* $\mathbb{T}_i \subset C_i$ *as "fronteiras". Seja* A *como acima,* $\det A = \pm 1$*. Construimos um espaço topológico* M *colando* C_1 *e* C_2 *ao longo de* $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ *usando* $\tilde{A} : \mathbb{T}_1 \to \mathbb{T}_2$*. Isto é,*

$$M = \Big(C_1 \coprod C_2 \Big) / \sim$$

em que $x \sim \tilde{A}x$ *para* $x \in \mathbb{T}_1$, $\tilde{A}x \in \mathbb{T}_2$*. Calcule* $\pi_1(M, x_0)$, $x_0 \in \mathbb{T}_1$*, em função das entradas da matriz* A*.*