TGIAF FICHA #8 (AULA PRÁTICA)

Exercício p288 #9

Exercício. *Seja* $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um campo vectorial contínuo limitado, isto é,* $\|V(x)\| \le C$. *Para cada* n *definimos* $\gamma_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ *através de:*

- $\gamma_n(0) = (0,0)$
- *Estando* γ_n *definida em* $\left[\,0\,,\,\frac{k}{n}\,\right]$, *definimos* γ_n *em* $\left[\,\frac{k}{n}\,,\,\frac{k+1}{n}\,\right]$, *por*
$$\gamma_n(t) = \gamma_n\left(\tfrac{k}{n}\right) + \left(t - \tfrac{k}{n}\right) V\left(\gamma_n\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)$$

Mostre que

(1) *Seja* $V_t = V(\gamma_n(t))$. *Dados* $t_1 \le \frac{i}{n} < \frac{j}{n} \le t_2$,
$$\gamma_n(t_2) - \gamma_n(t_1) = \frac{(i - nt_1)V_{\frac{i-1}{n}} + V_{\frac{i}{n}} + \ldots + V_{\frac{j-1}{n}} + (nt_2 - j)V_{\frac{j}{n}}}{n}$$

(2) *A sucessão* $\{\gamma_n\}$ *tem uma subsucessão que converge uniformemente em compactos para uma função contínua* $\gamma : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$.

(3) γ *é diferenciável e* $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$. *Sugestão: Se* $t \le \frac{i}{n} < \frac{j}{n} \le t + h$, *então*

$$\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t) - hV =$$
$$\frac{(i - nt)(V_{\frac{i-1}{n}} - V) + (V_{\frac{i}{n}} - V) + \ldots + (V_{\frac{j-1}{n}} - V) + (nt + nh - j)(V_{\frac{j}{n}} - V)}{n}$$

Exercício. *Neste exercício todos os espaços são localmente compactos de Hausdorff.* X^Y *representa o espaço das funções contínuas de* Y *para* X *com a topologia compacta aberta e* $X + Y$ *representa a reunião disjunta de* X *e* Y *com a topologia gerada pela base* $\tau_X \cup \tau_Y$. *Mostre que os seguintes espaços são homeomorfos:*

(1) $\left(Y^X\right)^Z$ *e* $Y^{X \times Z}$
(2) $Z^X \times Z^Y$ *e* Z^{X+Y}
(3) $Y^X \times Z^X$ *e* $(Y \times Z)^X$