1. Espaços de Baire

Definição e Proposição 1.1. *Um espaço topológico X é um espaço de Baire sse uma das seguintes condições equivalentes se verificar:*

(1) *A intersecção duma família contável de abertos densos é densa.*
(2) *A união duma família contável de fechados de interior vazio tem interior vazio*

Demonstração. Para ver que as duas condições são equuivalentes basta observar que $\bar{A} = X \Leftrightarrow (\bar{A})^c = \emptyset$ e recordar que $(\bar{A})^c = \operatorname{int}(A^c)$. □

Teorema 1.2. *Um espaço completo é um espaço de Baire.*

Demonstração. Seja $\{A_n\}$ uma família contável de abertos densos. Seja $U \in \tau$. Mostremos que $U \cap \bigcap A_n \neq \emptyset$.

$U \cap A_1 \neq \emptyset$ logo, como X é regular existe uma bola B_1 tal que $\bar{B}_1 \subset U \cap A_1$. Podemos escolher B_1 tal que $\operatorname{diam} B_1 < 1$.

Agora $B_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ logo escolhemos uma bola B_2 tal que $\bar{B}_2 \subset B_1 \cap A_2$ e $\operatorname{diam} B_2 < \frac{1}{2}$. Continuamos, construindo bolas B_n com $\bar{B}_n \subset B_{n-1} \cap A_n$ e $\operatorname{diam} B_n < \frac{1}{n}$. Então, como X é completo, existe um ponto $x \in \bigcap \bar{B}_n \subset \bigcap A_n$. Logo $x \in U \cap \bigcap A_n \neq \emptyset$. □

Teorema 1.3 (Limitação Uniforme)**.** *Seja X um espaço de Baire e Y um espaço métrico. Seja $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família pontualmente limitada de funções contínuas $f_\alpha : X \to Y$, isto é, para cada $x \in X$, $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in I}$ é um subconjunto limitado de Y. Então existe um aberto $A \subset X$ tal que o conjunto*

$$\{f_\alpha(x) \,:\, x \in A, \alpha \in I\}$$

é limitado.

Demonstração. Fixemos um ponto $y \in Y$. Seja $F_{M,\alpha} = \{x \in X \,:\, d(f_\alpha(x), y) \leq M\}$. Então $F_{M,\alpha}$ é fechado logo $F_M = \bigcap_\alpha F_{M,\alpha}$ é fechado. Como para cada x, $\{f_\alpha(x)\}$ é limitado, $X = \bigcup_M F_M$ logo existe um M tal que $A = \operatorname{int} F_M \neq \emptyset$. Dado qualquer $x \in A$ e qualquer α temos então $d(f_\alpha(x), y) \leq M$ o que termina a demonstração. □

2. Espaços vectoriais normados

Definição 2.1. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Uma norma em E é uma aplicação $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty[$ tal que

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
(3) Para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Ao par $(E, \|\cdot\|)$ chama-se um espaço vectorial normado. A métrica associada à norma $\|\cdot\|$ é $d(x,y) = \|x - y\|$. E diz-se um espaço de Banach se esta métrica for completa.

Exemplo 2.1. Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas: seja $x = (x_1, \dots, x_n)$

- $\|x\|_p = (\,|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\,)^{\frac{1}{p}}$
- $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Teorema 2.2. *Seja $\phi : E \to F$ um operador linear. São equivalentes*

(1) *ϕ é contínuo em $x_0 \in E$*
(2) *ϕ é contínuo em $0 \in E$*
(3) *Existe um K tal que $\|\phi(x)\| \leq K\|x\|$*
(4) *ϕ é uniformemente contínuo*

Demonstração. $4 \Rightarrow 1$ é imediato.

$1 \Rightarrow 2$ Se $x_n \to 0$ então $x_n + x_0 \to x_0$ logo $\phi(x_n) + \phi(x_0) = \phi(x_n + x_0) \to \phi(x_0)$ logo $\phi(x_n) \to 0$.

$2 \Rightarrow 3$ Por definição de continuidade em $x = 0$, existe um δ tal que $\|y\| < \delta \Rightarrow \|\phi(y)\| < 1$. Seja K tal que $\frac{1}{K} < \delta$. Então, para qualquer x,

$$\left\| \frac{x}{K\|x\|} \right\| = \frac{1}{K} < \delta \Longrightarrow \left\| \phi\left(\frac{x}{K\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{K\|x\|} \|\phi(x)\| < 1$$

logo $\|\phi(x)\| < K\|x\|$.

$3 \Rightarrow 4$ Dado um ε seja $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Então, se $\|x - y\| < \delta$,

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|\phi(x - y)\| \leq K\|x - y\| < K\delta = \varepsilon$$

□

Teorema 2.3. *Um espaço vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$ de dimensão finita igual a n é isomorfo a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$.*

Demonstração. Fixamos uma base $e_1, \ldots, e_n$ de V tal que $\|e_i\| = 1$ e definimos $\phi : \mathbb{R}^n \to V$ por

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

Então ϕ é linear e bijectiva. ϕ é contínua porque

$$\|\phi(x)\| \leq \|x_1 e_1\| + \ldots + \|x_n e_n\| = |x_1| + \ldots + |x_n| = \|x\|_1$$

Falta ver que ϕ^{-1} é contínua. Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$. S é limitado e fechado logo é compacto. Seja K o mínimo da função $x \mapsto \|\phi(x)\|$ em S. Então, para qualquer $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\| \phi\left(\frac{z}{\|z\|_1}\right) \right\| = \frac{\|\phi(z)\|}{\|z\|_1} \geq K$$

Se $w = \phi(z)$, $\|\phi^{-1}(w)\|_1 = \|z\|_1 \leq \frac{1}{K}\|\phi(z)\| = \frac{1}{K}\|w\|$ portanto ϕ^{-1} é contínua. □

Corolário 2.4. *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vectorial normado de dimensão finita. Então*

(1) *V é um espaço de Banach*
(2) *V é localmente compacto*
(3) *Qualquer operador linear $\phi : V \to E$ é contínuo*

Demonstração. Só 3 necessita de demonstração. Seja $\phi : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|)$. Seja e_i a base canónica e $K = \max_i \|\phi(e_i)\|$. Então

$$\|\phi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n)\| = |x_1|\|\phi(e_1)\| + \ldots + |x_n|\|\phi(e_n)\| \leq K\|x\|_1$$

□

Teorema 2.5 (Riesz)**.** *$(E, \|\cdot\|)$ é localmente compacto sse tem dimensão finita.*

Antes de começarmos a demonstração precisamos dum resultado preliminar:

Lema 2.6 (Riesz)**.** *Seja $V \subset E$ um subespaço de dimensão finita. Então*

$$\underset{\theta \in]0,1[}{\forall} \ \underset{e \in E}{\exists} \ \|e\| = 1, \ d(e, V) > \theta$$

Demonstração. Seja $u \in E - V$. V é fechado porque é completo logo $d(u,V) > 0$. Seja $v \in V$ tal que $\|u-v\| < \frac{1}{\theta} d(u,V)$. Seja $e = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Então, dado $w \in V$,

$$\|e-w\| = \left\| \frac{u-v}{\|u-v\|} - w \right\| = \frac{\|u-(v+\|u-v\|w)\|}{\|u-v\|}$$

Como $v + \|u-v\|w \in V$, $\|u-(v+\|u-v\|w)\| \geq d(u,V)$. Logo $\|e-w\| > \theta$. □

Passemos à demonstração do teorema de Riesz.

Demonstração. Provemos por absurdo. Seja E um espaço de dimensão infinita. Seja $U \in \mathcal{V}_0$ com $\bar{U}$ compacto. Então existe um ε tal que $S_\varepsilon = \{x \in E : \|x\| = \varepsilon\} \subset V$ logo é compacto. Mas S_ε é homeomorfo a $S_1 = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ logo basta mostrar que S_1 não é compacta. Claramente

$$S_1 \subset \bigcup_{x \in S_1} B_{\frac{1}{4}}(x)$$

Mostraremos que não existe uma subcobertura finita. Tomemos $e_1 \in S_1$ e seja $V_1 = \operatorname{Span}\{e_1\}$. Então existe $e_2 \in S_1$ com $\|e_2 - e_1\| > \frac{1}{2}$. Indutivamente, dados $e_1, \ldots, e_n \in S_1$ com $\|e_i - e_j\| > \frac{1}{2}$ pomos $V_n = \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ e tomamos $e_{n+1} \in S_1$ com $d(e_{n+1}, V_n) > \frac{1}{2}$. A condição $\|e_i - e_j\| > \frac{1}{2}$ garante que numa bola $B_{\frac{1}{4}}(x)$ existe no máximo um e_i pelo que um número finito de bolas não cobre S_1. □

3. Consequências do teorema de Baire

Teorema 3.1 (Aplicação Aberta)**.** *Sejam E, F espaços de Banach, $\phi \in L(E,F)$ sobrejectivo. Então ϕ é aberto.*

Demonstração. Seja $A \subset E$ um aberto, $x \in A$. Mostremos que $\phi(x)$ está no interior de $\phi(A)$. Existe um ε tal que $B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon + x \subset A$ logo $\phi(B_\varepsilon) + \phi(x) \subset \phi(A)$. Se existir um δ tal que $B_\delta \subset \phi(B_\varepsilon)$ então

$$B_\delta(\phi(x)) = B_\delta + \phi(x) \subset \phi(B_\varepsilon) + \phi(x) \subset \phi(A)$$

logo $\phi(x) \in \operatorname{int} \phi(A)$. Mostremos pois que $B_\delta \subset \phi(B_\varepsilon)$ para algum δ.

(1) Como $F = \phi(E)$,

$$F = \phi\left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n \phi(B_n) = \bigcup_n \overline{\phi(B_n)}$$

Então, pelo teorema de Baire, existe um n tal que $\operatorname{int} \overline{\phi(B_n)} \neq \emptyset$. Ou seja, existe uma bola $B_\delta(y_0) = y_0 + B_\delta \subset \overline{\phi(B_n)}$.

(2) Mostremos agora que $B_\delta \subset \overline{\phi(B_n)}$. Seja $y \in B_\delta$. Então $\pm y \in B_\delta$ logo $y_0 \pm y \in y_0 + B_\delta \subset \overline{\phi(B_n)}$. Portanto existem sucessões $x_k^\pm \in B_n$ com $\phi(x_k^\pm) \to y_0 \pm y$. Mas então $\frac{1}{2}(x_k^+ - x_k^-) \in B_n$ e $\phi\left(\frac{1}{2}(x_k^+ - x_k^-)\right) \to y$ logo $y \in \overline{\phi(B_n)}$.

(3) Mostremos que $B_\delta \subset \phi(B_{3n})$. Segue imediatamente que $B_{\frac{\varepsilon\delta}{3n}} \subset \phi(B_\varepsilon)$ pelo que o teorema fica demonstrado. Seja $y \in B_\delta \subset \overline{\phi(B_n)}$. Então existe $x_1 \in B_n$ tal que $\|y - \phi(x_1)\| < \frac{\delta}{2}$, ou seja,

$$y - \phi(x_1) \in \frac{1}{2} B_{\frac{\delta}{2}} \subset \frac{1}{2}\overline{\phi(B_n)} = \overline{\phi(B_{\frac{n}{2}})}$$

Então existe um $x_2 \in B_{\frac{n}{2}}$ tal que $\|y - \phi(x_1) - \phi(x_2)\| < \frac{\delta}{4}$, ou seja,

$$y - \phi(x_1) - \phi(x_2) \in B_{\frac{\delta}{4}} \subset \overline{\phi(B_{\frac{n}{4}})}$$

Prosseguindo, obtemos uma sucessão $\{x_k\}$ em E com $\|x_k\| \leq 2^{-k}n$. Como E é completo a série $\sum_k x_k$ converge para um elemento x. Então $\phi(x) = y$. Mas

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}n = 2n < 3n$$

Portanto $x \in B_{3n}$ logo $y \in \phi(B_{3n})$. □

Corolário 3.2. *Uma função linear contínua bijectiva $\phi : E \to F$ é um isomorfismo.*

Corolário 3.3. *Seja E um espaço vectorial, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas que tornam E completo. Então se $\|\cdot\|_1 \leq K\|\cdot\|_2$, as normas são equivalentes.*

Demonstração. A função $Id : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$ é contínua logo é um isomorfismo. □

Teorema 3.4 (Gráfico fechado)**.** *Sejam E, F espaços de Banach, $\phi \in \Lambda(E, F)$, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in E\}$ o gráfico de f. Então f é contínua sse G_f é fechado em $E \times F$.*

Demonstração. Suponhamos que f é contínua. Seja $(x, y) \in \bar{G}_g$. Então existe uma sucessão $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$. Como $x_n \to x$, $f(x_n) \to f(x) = y$ logo $(x, y) \in G_f$. Assumimos agora que G_f é fechado. Então $G_f \subset E \times F$ é um subespaço de Banach. A projecção $p : G_f \to E$ é contínua e bijectiva logo é um homeomorfismo. Portanto a inversa $p^{-1} = (Id, f)$ é contínua logo f é contínua. □

Teorema 3.5 (Banach-Steinhaus)**.** *Seja $T_\alpha : E \to F$ uma família de funções contínuas lineares tais que para cada $x \in E$, $\{T_\alpha(x)\}$ é limitado em F. Então existe uma constante K tal que para todo o α $\|T_\alpha(x)\| \leq K\|x\|$.*

Demonstração. Pelo teorema 1.3 existe um aberto $A \subset E$ e uma constante M tal que para qualquer α e qualquer $x \in A$, $\|T_\alpha(x)\| \leq M$. Tomemos $B_\delta(x_0) \subset A$. Seja $x \in B_\delta(0)$. Então

$$\|T_\alpha(x)\| \leq \|T_\alpha(x) + T_\alpha(x_0)\| + \|-T_\alpha(x_0)\| = \|T_\alpha(x + x_0)\| + \|T_\alpha(x_0)\| \leq M + M = 2M$$

Seja $K = \frac{2M}{\delta}$. Então, para qualquer $x \in X$,

$$\delta \frac{x}{\|x\|} \in B_\delta \Longrightarrow \left\| T_\alpha \left(\delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq 2M \Longrightarrow \|T_\alpha(x)\| \leq K\|x\|$$

□