1. Definição e exemplos. Bases.

Dar uma topologia num conjunto X é especificar quais dos subconjuntos de X são abertos:

Definição 1.1. Um espaço topológico é um par (X, τ) em que τ é uma colecção de subconjuntos de X tal que

(1) $\emptyset, X \in \tau$

(2) $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \tau$ (uniões arbitrárias de abertos são abertas)

(3) $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$ (intersecções finitas de abertos são abertas)

Exemplo 1.1. Seja τ o conjunto de todos os subconjuntos de X. Esta é a chamada topologia discreta. É a topologia natural em conjuntos finitos. É também a topologia natural no conjuntos dos inteiros $\mathbb{Z}$.

Para lidar mais facilmente com uma topologia, usa-se muitas vezes uma colecção mais pequena de abertos, $\mathcal{B} \subset \tau$, chamada uma base da topologia:

Definição 1.2. Um subconjunto $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma base de τ sse

$$\underset{A\in\tau}{\forall}\ \underset{x\in A}{\forall}\ \underset{B\in\mathcal{B}}{\exists}\ x \in B \subset A$$

Teorema 1.3. *Seja $\mathcal{B}$ uma base de τ. Então $A \in \tau$ sse $A = \bigcup_\alpha B_\alpha$ com $B_\alpha \in \mathcal{B}$.*

Demonstração. Se $A = \bigcup_\alpha B_\alpha$, A é uma união de abertos, logo um aberto. Agora seja $A \in \tau$. Então, para cada $x \in A$ existe um $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$. Basta então mostrar que $A = \bigcup_{x\in A} B_x$:

($\subset$) Se $y \in A$, uma vez que $y \in B_y$ temos $y \in \bigcup_{x\in A} B_x$.

($\supset$) Se $y \in \bigcup_{x\in A} B_x$, então existe um $x \in A$ tal que $y \in B_x \subset A$. Logo $y \in A$. $\square$

Exemplo 1.2. O conjunto $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ dos subconjuntos de X com um elemento é uma base da topologia discreta.

É possível definir uma topologia dando apenas uma base $\mathcal{B}$:

Teorema 1.4. *Seja $\mathcal{B}$ uma colecção de subconjuntos de X tal que*

(i) $\underset{x\in X}{\forall}\ \underset{B\in\mathcal{B}}{\exists}\ x \in B$

(ii) $\underset{B_1,B_2\in\mathcal{B}}{\forall}\ \underset{x\in B_1\cap B_2}{\forall}\ \underset{B_3\in\mathcal{B}}{\exists}\ x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Então a colecção

$$\tau = \left\{A \subset X : \underset{x\in A}{\forall}\ \underset{B\in\mathcal{B}}{\exists}\ x \in B \subset A\right\}$$

é uma topologia sobre X e $\mathcal{B}$ é uma base de τ.

Demonstração. A última afirmação segue imediatamente da definição de base e da observação que $\mathcal{B} \subset \tau$. Provemos portanto que τ é uma topologia.

(1) $\emptyset \in \tau$ é imediato. $X \in \tau$ segue de (i).

(2) Seja $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$. Mostremos que $\bigcup_i A_i \in \tau$. Dado $x \in \bigcup_i A_i$, $x \in A_j$ para algum $j \in I$. Como $A_j \in \tau$, existe um $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A_j$. Mas então $x \in B \subset \bigcup_i A_i$. Logo $\bigcup_i A_i \in \tau$.

(3) Sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Mostremos que $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Seja $x \in A_1 \cap A_2$. Então $x \in A_i$, $i = 1, 2$ logo existem $B_1, B_2 \in \tau$ tal que $x \in B_i \subset A_i$, $i = 1, 2$. Pela propriedade (ii), existe um $B_3 \in \tau$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Mas então $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2$. Logo $A_1 \cap A_2 \in \tau$. □

Exemplo 1.3. Seja $X = \mathbb{R}$ e seja $\mathcal{B} = \{]a, b[: \ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. $\mathcal{B}$ satisfaz as propriedades (i) e (ii). Logo $\mathcal{B}$ gera uma topologia τ sobre $\mathbb{R}$. Esta é a topologia usual sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.4. Seja $X = \mathbb{R}^2$ e seja $\mathcal{B} = \{B_r(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ a colecção das bolas em $\mathbb{R}^2$. Mostremos que $\mathcal{B}$ gera uma topologia em $\mathbb{R}^2$. Dado $y \in B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$, tomemos $r = \min\{r_1 - \|y - x_1\|, r_2 - \|y - x_2\|\}$. Mostremos que $B_r(y) \subset B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$. Seja $z \in B_r(y)$. Então

$$\|z - x_1\| \leq \|z - y\| + \|y - x_1\| < r + \|y - x_1\| \leq (r_1 - \|y - x_1\|) + \|y - x_1\| = r_1$$

Logo $z \in B_{r_1}(x_1)$. Da mesma forma $z \in B_{r_2}(x_2)$. Logo $z \in B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$. Portanto $\mathcal{B}$ gera uma topologia τ. Esta é a topologia usual em $\mathbb{R}^2$.

2. Subbases

Definição 2.1. Dadas duas topologias τ, τ' num conjunto X, dizemos que τ é menos fina que τ' sse $\tau \subset \tau'$. Dizemos que τ é mais fina que τ' sse $\tau \supset \tau'$.

Dada uma colecção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X, a topologia gerada por $\mathcal{S}$ é a topologia menos fina que contém $\mathcal{S}$:

Teorema 2.2. *Seja $\mathcal{S}$ uma colecção de subconjuntos de X. Então*

(1) *Existe uma topologia $\tau \supset \mathcal{S}$ tal que, para qualquer topologia $\tau' \supset \mathcal{S}$, $\tau \subset \tau'$ (isto é, τ é a topologia menos fina que contém $\mathcal{S}$).*
(2) *A colecção*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{\, S_1 \cap \ldots \cap S_k \ : S_i \in \mathcal{S}\,\} \cup \{X\}$$

formada por intersecções finitas de conjuntos em $\mathcal{S}$ é uma base de τ.

Demonstração. Comecemos por construir τ. Verifiquemos que $\mathcal{B}$ satisfaz as condições do teorema 1.4. A condição (i) é satisfeita porque $X \in \mathcal{B}$. A condição (ii) é satisfeita porque $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Logo podemos definir uma topologia τ sobre X tal que $\mathcal{B}$ é uma base de τ. Como $\mathcal{B} \subset \tau$, $\mathcal{S} \subset \tau$. Mostremos agora que τ é a topologia menos fina contendo $\mathcal{S}$. Seja $\tau' \supset \mathcal{S}$ uma topologia. Então $\mathcal{B} \subset \tau'$ (intersecções finitas de abertos são abertas). Seja $A \in \tau$. Então, pelo teorema 1.3 $A = \bigcup_\alpha B_\alpha$ com $B_\alpha \in \mathcal{B}$ pelo que $A \in \tau'$. Logo $\tau \subset \tau'$. □

Definição 2.3. Uma colecção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X é uma subbase duma topologia τ sobre X sse τ é a topologia menos fina que contém $\mathcal{S}$. Dizemos também que τ é gerada por $\mathcal{S}$.

Exercício 2.1. Mostre que a intersecção duma família de topologias sobre X é uma topologia sobre X. Mostre que a topologia gerada por $\mathcal{S}$ é a intersecção de todas as topologias contendo $\mathcal{S}$.

3. Subespaços e produtos

Definição 3.1. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e seja $Y \subset X$. Definimos a topologia induzida em Y por X através de

$$\tau_Y = \{A \cap X \,:\, A \in \tau\}$$

(Y, τ_Y) diz-se um subespaço de (X, τ_X).

Exemplo 3.1. A topologia induzida por $\mathbb{R}$ em $\mathbb{Z}$ é a topologia discreta.

Proposição 3.2. *Seja $\mathcal{B}_X$ uma base de (X, τ_X). Então $\mathcal{B}_Y = \{B \cap X \,:\, B \in \mathcal{B}_X\}$ é uma base de (Y, τ_Y).*

Demonstração. Seja $A \in \tau_Y, x \in A$. Então $A = A' \cap Y$ com $A' \in \tau_X$ logo existe $B' \in \mathcal{B}_X$ com $x \in B' \subset A'$. Seja $B = B' \cap Y$. Então $x \in B \subset A$. □

Exercício 3.1. Seja $S^1 \subset \mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos da forma $e^{i\theta}$. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ induz uma topologia em S^1. Mostre que os conjuntos

$$\{e^{i\theta} \,:\, \theta \in]\theta_1, \theta_2[\}$$

formam uma base dessa topologia.

Definição 3.3. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Então

$$\mathcal{B} = \{U \times V \,:\, U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

gera uma topologia em $X \times Y$. Esta topologia é a chamada topologia caixa.

Para ver que $\mathcal{B}$ gera de facto uma topologia basta observar que

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

Proposição 3.4. *Sejam $\mathcal{B}_X$ uma base de (X, τ_X) e $\mathcal{B}_Y$ uma base de (Y, τ_Y). Então*

$$\mathcal{B} = \{B_X \times B_Y \,:\, B_X \in \mathcal{B}_X, B_Y \in \mathcal{B}_Y\}$$

é uma base da topologia caixa em $X \times Y$.

Demonstração. Seja $A \in \tau$ e $(x, y) \in A$. Então $(x, y) \in U \times V \subset A$ para abertos $U \in \tau_X, V \in \tau_Y$. Logo existem $B_X \in \mathcal{B}_X, B_Y \in \mathcal{B}_Y$ tal que $x \in B_X \subset U$ e $y \in B_Y \subset V$. Mas então $x \in B_X \times B_Y \subset U \times V \subset A$. □

Exercício 3.2. Mostre que a topologia caixa em $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide com a topologia usual definida usando bolas.

4. Vizinhanças e interior

Uma vizinhança aberta dum ponto x é um aberto que contém x. Denotamos por $\mathcal{V}_x$ a colecção das vizinhanças abertas de x:

$$\mathcal{V}_x = \{U \in \tau \,:\, x \in U\}$$

Definição 4.1. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $Y \subset X$. O interior de Y é o conjunto definido por

$$x \in \mathrm{Int\,Y} \Leftrightarrow \underset{\mathrm{U} \in \mathcal{V}_{\mathrm{x}}}{\exists} \mathrm{U} \subset \mathrm{Y}$$

O interior de Y é o maior aberto contido em Y:

Proposição 4.2.

$$\mathrm{Int\,Y} = \bigcup \{\mathrm{A} \,:\, \mathrm{A} \in \tau, \mathrm{A} \subset \mathrm{Y}\}$$

Demonstração. Dividimos a demonstração em duas partes:

($\subset$) Seja $x \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Y}$. Então existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subset Y$. Mas então $U \in \{A : A \in \tau, A \subset Y\}$ logo $x \in U \subset \bigcup\{A : A \in \tau, A \subset Y\}$.

($\supset$) Seja $x \in \bigcup\{A : A \in \tau, A \subset Y\}$. Então existe um $U \in \{A : A \in \tau, A \subset Y\}$ tal que $x \in U$. Mas então $U \in \mathcal{V}_x$ e $U \subset Y$ logo $x \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Y}$. □

Como corolário imediato temos

Corolário 4.3. $\mathrm{Int}\,\mathrm{Y}$ *é aberto e um conjunto* Y *é aberto sse* $Y = \mathrm{Int}\,\mathrm{Y}$.

5. Conjuntos fechados e fecho

Definimos agora fecho e exterior dum conjunto.

Definição 5.1. O fecho dum conjunto $Y \subset X$, $\bar{Y}$, é definido por

$$x \in \bar{Y} \Leftrightarrow \underset{U \in \mathcal{V}_x}{\forall} U \cap Y \neq \emptyset$$

O exterior dum conjunto é definido por $\operatorname{ext} Y = (\bar{Y})^c = \mathrm{Int}\,(\mathrm{Y}^c)$.

Provemos que de facto $(\bar{Y})^c = \mathrm{Int}\,(\mathrm{Y}^c)$:

$$x \in (\bar{Y})^c \Leftrightarrow x \notin \bar{Y} \Leftrightarrow \underset{U \in \mathcal{V}_x}{\exists} U \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow \underset{U \in \mathcal{V}_x}{\exists} U \subset Y^c \Leftrightarrow x \in \mathrm{Int}\,(\mathrm{Y}^c)$$

Um conjunto F diz-se fechado sse F^c for aberto.

Exercício 5.1. Mostre que a intersecção de conjuntos fechados é fechada.

O fecho dum conjunto Y é o menor fechado que contem Y:

Proposição 5.2.

$$\bar{Y} = \bigcap\{F : F \textit{ é fechado}, Y \subset F\}$$

Demonstração. Usando a relação $(\bar{Y})^c = \mathrm{Int}\,(\mathrm{Y}^c)$ obtemos

$$(\bar{Y})^c = \bigcup\{A : A \in \tau, A \subset Y^c\}$$

Logo

$$\bar{Y} = \bigcap\{A^c : A \in \tau, A \subset Y^c\}$$

Escrevendo $F = A^c$ temos

$$\bar{Y} = \bigcap\{F : F \text{ é fechado}, F^c \subset Y^c\}$$

Mas $F^c \subset Y^c$ é equivalente a $Y \subset F$. □

Corolário 5.3. $\bar{Y}$ *é fechado e um conjunto* Y *é fechado sse* $Y = \bar{Y}$.

Proposição 5.4. *Seja* $Y \subset X$ *um subespaço. Dado* $C \subset Y$ *sejam* $\overline{C}^Y, \overline{C}^X$ *os fechos de* C *em* X *e em* Y*. Então* $\overline{C}^Y = \overline{C}^X \cap Y$.

Demonstração. Sejam $\mathcal{V}_x^X, \mathcal{V}_x^Y$ as vizinhan‘c cas de x em X e em Y. Então

($\subset$) Seja $x \in \overline{C}^Y$. Seja $U \in \mathcal{V}_x^X$. Então $U \cap Y \in \mathcal{V}_x^Y$ logo $U \cap Y \cap C \neq \emptyset$ logo $U \cap C \neq \emptyset$. Portanto $x \in \overline{C}^X \cap Y$.

($\supset$) Seja $x \in \overline{C}^X \cap Y$. Seja $V \in \mathcal{V}_x^Y$. Então $V = U \cap Y$, com $U \in \mathcal{V}_x^X$, logo $V \cap C = V \cap C \cap Y = U \cap C \neq \emptyset$. Portanto $x \in \overline{C}^Y$. □

Corolário 5.5. *Seja $Y \subset X$ um conjunto fechado. Então um conjunto $C \subset Y$ é fechado em X sse C for fechado na topologia de Y.*

Demonstração. $\overline{C}^X \subset \overline{Y}^X = Y$ logo $\overline{C}^X = \overline{C}^X \cap Y = \overline{C}^Y$. Agora basta observar que C é fechado sse $C = \bar{C}$. □

Uma topologia pode ser definida dando os fechados em vez dos abertos:

Exemplo 5.1. A topologia cofinita é aquela em que um conjunto é fechado sse é finito ou igual a X. A topologia cocontável é aquela em que um conjunto é fechado sse é contável ou igual a X.

Exercício 5.2. Mostre que as topologias cofinita e cocontável são de facto topologias.

6. Sucessões

Definição 6.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma sucessão de termos em X é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to X$. É costume escrever $x_n = x(n)$ e representar a sucessão por (x_n).

A seguinte terminologia é muitas vezes útil:

Definição 6.2. Seja $A \subset X$.
- Dizemos que (x_n) está frequentemente em A sse $\underset{m\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{n\geq m}{\exists}\ x_n \in A$.
- Dizemos que x é um sublimite de (x_n) sse $\underset{U\in\mathcal{V}_x}{\forall}$ (x_n) está frequentemente em U.
- Dizemos que (x_n) está eventualmente em A (ou $x_n \in A$ para n suficientemente grande) sse $\underset{m\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq m}{\forall}\ x_n \in A$.
- Dizemos que x é um limite de (x_n) (ou que x_n converge para x) sse $\underset{U\in\mathcal{V}_x}{\forall}$ (x_n) está eventualmente em U.

Exercício 6.1. Mostre que se (x_n) está eventualmente em U e em V então (x_n) está eventualmente em $U \cap V$. Será o mesmo verdade substituindo eventualmente por frequentemente?

Exercício 6.2. Mostre que uma sucessão x_n que é constante igual a x a partir de certa ordem, converge para x.

Exemplo 6.1. Mostremos que na topologia cocontável uma sucessão tem um limite são sse é eventualmente constante. Seja $x_n \to x$. O conjunto $U = F^c = (X - \{x_n\}) \cup \{x\}$ é aberto logo $U \in \mathcal{V}_x$. Então $\{x_n\}$ está eventualmente em U. Mas

$$x_n \in U \Leftrightarrow (\, x_n \in X - \{x_n\} \text{ ou } x_n \in \{x\}\,) \Leftrightarrow x_n = x$$

Logo, (x_n) é eventualmente constante igual a x.

Em $\mathbb{R}^n$ o fecho dum conjunto pode ser definido usando sucessões. Num espaço topológico temos

Proposição 6.3. *Seja x_n uma sucessão de termos em Y tal que $x_n \to x$. Então $x \in \bar{Y}$.*

Demonstração. Seja $U \in \mathcal{V}_x$. Então eventualmente $x_n \in U$. Logo $U \cap Y \neq \emptyset$. Logo $x \in \bar{Y}$. □

A implicação contrária não se verifica no entanto:

Exercício 6.3. Seja $\mathbb{R}$ com a topologia cocontável e seja $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Mostre que $\overline{[0,1]} = \mathbb{R}$ mas se $x \notin [0,1]$ não há nenhuma sucessão $\{x_n\} \subset [0,1]$ convergindo para x.

Definição 6.4. Um espaço topológico (X,τ) tem o primeiro axioma de numerabilidade sse, para qualquer $x \in X$ existir uma sucessão $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$ de vizinhanças de x tal que

$$\underset{U \in \mathcal{V}_x}{\forall} \ \underset{n>0}{\exists} \ U_n \subset U$$

Exemplo 6.2. Em $\mathbb{R}^2$ para cada x podemos escolher $U_n = B_{\frac{1}{n}}(x)$. Isto mostra que $\mathbb{R}^2$ possui o primeiro axioma de numerabilidade.

O primeiro axioma de numerabilidade é o que precisamos para poder definir fecho usando sucessões:

Proposição 6.5. *Seja (X,τ) um espaço topológico com o primeiro axioma de numerabilidade, $Y \subset X$. Então $x \in \bar{Y}$ sse existir uma sucessão $\{x_n\} \subset Y$ tal que $x_n \to x$.*

Demonstração. Já provámos uma direcção. Seja portanto $x \in \bar{Y}$, $\{U_n\} \subset \mathcal{V}_x$ a sucessão de vizinhanças. Então $U_n \cap Y \neq \emptyset$. Escolhamos um ponto $x_n \in U_n \cap Y$. Então dado $U \in \mathcal{V}_x$ existe um N tal que $U_N \subset U$. Logo, para $n \geq N$, $x_n \in U_n \subset U_N \subset U$. Concluimos que $x_n \to x$. □

7. Redes

Se (X,τ) tem o primeiro axioma de numerabilidade, para cada $x \in X$ temos uma sucessão $\{U_n\} \subset \mathcal{V}_x$ com $U_n \subset U_m \Leftrightarrow n \geq m$. Se escolhernos pontos $x_n \in U_n$ então $x_n \to x$. A ideia das redes é a seguinte: em vez de usarmos os números naturais como índices, podíamos ter usado a família de conjuntos $\{U_1, U_2, \ldots\}$ como o conjunto dos índices. Então em vez de escrevermos x_n escreveríamos x_{U_n} e teríamos, para qualquer $W \in \{U_1, U_2, \ldots\}$, $x_W \in W$. A vantagem é que isto pode ser generalizado para espaços sem o primeiro axioma de numerabilidade.

Definição 7.1. Um conjunto dirigido $\mathcal{N}$ é um conjunto com uma relação de ordem $(\leq)$ tal que

$$\underset{\nu_1,\nu_2 \in \mathcal{N}}{\forall} \ \underset{\mu \in \mathcal{N}}{\exists} \ \mu \geq \nu_1 \text{ e } \mu \geq \nu_2$$

Uma rede em X é uma função $x : \mathcal{N} \to X$. É costume escrever $x_\nu = x(\nu)$.

As noções de "eventualmente em" e "frequentemente em" generalizam-se imedediatamente para redes, assim como as noções de sublimite e limite.

Exemplo 7.1. $\mathbb{N}$ é um conjunto dirigido. As redes $x : \mathbb{N} \to X$ são as sucessões.

Exemplo 7.2. Para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ com a relação $U \geq V \Leftrightarrow U \subset V$ é um conjunto dirigido. Uma rede (x_α) satisfazendo $\underset{U \in \mathcal{V}_x}{\forall} x_U \in U$, converge para x.

Proposição 7.2. *Seja $Y \subset X$ um subespaço e seja (x_ν) uma rede de termos em Y. Então x é um limite de (x_ν) na topologia de Y sse $x \in Y$ e x é um limite de (x_ν) na topologia de X.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em duas partes:

($\Rightarrow$) Seja U uma vizinhança de x em X. Então $U \cap Y$ é uma vizinhança de x em Y. Mas então (x_ν) está eventualmente em $U \cap Y$, logo em U.

($\Leftarrow$) Seja V uma vizinhança de x em Y. Então $V = U \cap Y$ em que U é uma vizinhança de x em X. (x_ν) está eventualmente em U e está sempre em Y logo está eventualmente em $V = U \cap Y$. □

Proposição 7.3. *$x \in \bar{Y}$ sse existir uma rede (x_ν) em Y convergindo para x.*

Demonstração. Se $x_\nu \to x$ então $x \in \bar{Y}$: a demonstração é a mesma que para sucessões. Portanto seja $x \in \bar{Y}$. Tomemos $\mathcal{V}_x$ como o conjunto dos índices e para cada $U \in \mathcal{N}$ escolhemos $x_U \in U \cap Y$. Então $x_U \to x$. □

8. Espaços de Hausdorff e unicidade de limite

Em $\mathbb{R}^n$ sucessões só podem convergir para um ponto (unicidade do limite). Tal não acontece em geral:

Exemplo 8.1. Dado um conjunto X seja $\tau = \{\emptyset, X\}$. Esta é a chamada topologia indiscreta. É fácil de ver que qualquer rede em X converge para todos os pontos de X.

Definição 8.1. Um espaço topológico (X, τ) diz-se de Hausdorff sse

$$\underset{a,b \in X}{\forall} \ \underset{U,V \in \tau}{\exists} \ a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$$

Proposição 8.2. *Um espaço topológico (X, τ) é de Hausdorff sse houver unicidade de limite para redes.*

Demonstração. Se $x_\alpha \to a$ e $x_\alpha \to b$ tomemos vizinhanças U, V disjuntas de a e b. Então x_α está eventualmente em U e em V logo está eventualmente em $U \cap V$ o que é impossível. Na outra direcção, se (X, τ) não é de Hausdorff, existem pontos a, b sem vizinhanças disjuntas. Seja

$$\mathcal{N} = \mathcal{V}_a \cup \mathcal{V}_b \cup \{U \cap V \ : U \in \mathcal{V}_a, V \in \mathcal{V}_b\}$$

Dado $W \in \mathcal{N}$, $W \neq \emptyset$ logo podemos escolher um ponto $x_W \in W$. Então (x_W) converge para a e para b. □

A topologia cocontável é um exemplo dum espaço que não é de Hausdorff, mas em que existe unicidade de limites para sucessões.

9. Funções contínuas

Uma função f é contínua num ponto x se a imagem de pontos próximos de x estiver próxima de $f(x)$:

Definição 9.1. Uma função $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ é contínua em $x \in X$ sse

$$\underset{U' \in \mathcal{V}_{f(x)}}{\forall} \ \underset{U \in \mathcal{V}_x}{\exists} \ f(U) \subset U'$$

Observemos que a condição $f(U) \subset U'$ é equivalente a $U \subset f^{-1}(U')$. Para verificar a continuidade de f basta usar bases:

Exercício 9.1. Sejam $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de τ, τ' respectivamente. Mostre que f é contínua em x sse

$$\underset{B' \in \mathcal{B}' \cap \mathcal{V}_{f(x)}}{\forall} \ \underset{B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_x}{\exists} \ f(B) \subset B'$$

Proposição 9.2. *f é contínua em x sse dada uma rede (x_α) em X, $x_\alpha \to x \Rightarrow f(x_\alpha) \to f(x)$.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em duas partes:

($\Rightarrow$) Seja $x_\alpha \to x$. Mostremos que $f(x_\alpha) \to f(x)$. Dado $U' \in \mathcal{V}_{f(x)}$, tomemos $U \in \mathcal{V}_x$ com $f(U) \subset U'$. Então x_α está eventualmente em U logo $f(x_\alpha)$ está eventualmente em $f(U) \subset U'$.

($\Leftarrow$) Provemos que se f não é contínua em x existe uma rede $x_\alpha \to x$ com $f(x_\alpha) \not\to f(x)$. Se f não é contínua em x,

$$\underset{U' \in \mathcal{V}_{f(x)}}{\exists} \ \underset{U \in \mathcal{V}_x}{\forall} \ U \not\subset f^{-1}(U')$$

Tomemos $\mathcal{V}_x$ como conjunto de índices. Dado $U \in \mathcal{V}_x$ escolhamos $x_U \in U$, $x_U \notin f^{-1}(U')$. Então $x_U \to x$ e $f(x_U) \notin U'$ logo $f(x_U) \not\to f(x)$. $\square$

Definição 9.3. Dizemos que $f : X \to Y$ é contínua sse f é contínua em todos os pontos $x \in X$.

Teorema 9.4. *Uma função $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ é contínua sse para qualquer $A' \in \tau'$, $f^{-1}(A') \in \tau$.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em duas partes:

($\Rightarrow$) Seja A' um aberto. Mostremos que $f^{-1}(A') = \mathrm{Int}\, f^{-1}(A')$ (logo é aberto). Seja $x \in f^{-1}(A')$. Então $f(x) \in A'$ logo $A' \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Portanto existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subset f^{-1}(A')$. Logo $x \in \mathrm{Int}\, f^{-1}(A')$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in X$. Mostremos que f é contínua em x. Dado $U' \in \mathcal{V}_{f(x)}$, tomamos $U = f^{-1}(U')$. $U \in \mathcal{V}_x$ logo f é contínua em x. $\square$

Teorema 9.5. *Seja $\mathcal{S}'$ uma subbase de (X', τ'). Então uma função $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ é contínua sse para qualquer $S' \in \mathcal{S}'$, $f^{-1}(S') \in \tau$.*

Demonstração. A direcção ($\Rightarrow$) segue imediatamente de $\mathcal{S}' \subset \tau'$. Provemos a direcção ($\Leftarrow$). Seja $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ a base definida em 2.2.

- Seja $B = S_1 \cap \ldots \cap S_k \in \mathcal{B}_\mathcal{S}$. Então $f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(S_k) \in \tau$.
- Seja agora $A' \in \tau'$. Então, pelo teorema 1.3, $A = \bigcup_i B_i$, $B_i \in \mathcal{B}_\mathcal{S}$ pelo que $f^{-1}(A) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \in \tau$.

Logo f é contínua. $\square$

Estamos agora em condições de definir isomorfismo entre espaços topológicos:

Definição 9.6. Dois espaços topológicos $(X, \tau), (X', \tau')$ dizem-se homeomorfos se existir uma bijecção $f : X \to X'$ tal que f, f^{-1} são contínuas. f diz-se um homeomorfismo.

Note-se que $A \mapsto f(A)$ induz uma bijecção $f : \tau \to \tau'$ com inversa $A' \mapsto f^{-1}(A')$.

Exemplo 9.1. A função $f(x) = \tan x$ é um homeomorfismo entre $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\mathbb{R}$.

10. Funções contínuas e subespaços

Teorema 10.1. *Seja (Y, τ) um espaço topológico, $X \subset Y$. Seja $\imath : X \to Y$ a inclusão. Então $\imath$ é contínua e uma função $f : Z \to X$ é contínua sse a função $\imath \circ f : Z \to Y$ for contínua.*

Demonstração. Seja U um aberto em Y. Então $\imath^{-1}(U) = U \cap X$ é aberto em X. Logo $\imath$ é contínua. Logo, se f for contínua, $\imath \circ f$ é contínua. Se $\imath \circ f$ for contínua, dado A aberto em X, $A = U \cap X$ com A aberto em Y. Então

$$(\imath \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\imath^{-1}(U)) = f^{-1}(A)$$

pelo que $f^{-1}(A)$ é aberto. □

Proposição 10.2. *Seja $X = \bigcup_i A_i$ com $A_i \in \tau$. Então uma função $f : X \to Y$ é contínua sse para todo o i as restrições $f|_{A_i} : A_i \to Y$ forem contínuas.*

Demonstração. $f|_{A_i} = f \circ \imath_i$ com $\imath_i : A_i \to X$ a inclusão. Logo f contínua implica $f|_{A_i}$ contínua. Suponhamos agora que para todo o i $f|_{A_i}$ é contínua. Seja $x \in X$. Então $x \in A_i$ para algum i. Dada uma rede $x_\alpha \to x$, como $A_i \in \mathcal{V}_x$, (x_α) está eventualmente em A_i logo para α grande, $f(x_\alpha) = f|_{A_i}(x_\alpha) \to f|_{A_i}(x) = f(x)$. □

Teorema 10.3 (Lema da colagem)**.** *Seja $X = F_1 \cup F_2$, F_i subconjuntos fechados de X. Sejam $f_i : F_i \to Y$, $i = 1, 2$, funções contínuas tais que $f_1 = f_2$ em $F_1 \cap F_2$. Então a função*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in F_1 \\ f_2(x) & x \in F_2 \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. Seja $C \subset Y$ um conjunto fechado. Então

$$f^{-1}(C) = (\, f^{-1}(C) \cap F_1 \,) \cup (\, f^{-1}(C) \cap F_2 \,)$$

$f^{-1}(C) \cap F_i = f_i^{-1}(C)$ é fechado em F_i (f_i é contínua), logo é fechado em X. A união de dois fechados é fechada logo $f^{-1}(C)$ é fechado. □

11. Topologia induzida e quocientes

Definição 11.1. Dadas duas topologias τ, τ' num conjunto X dizemos que τ é mais fina que τ' sse $\tau' \subset \tau$.

Seja Y um conjunto e (X, τ_X) um espaço topológico. Dada uma função $f : Y \to X$, f é sempre contínua se pusermos a topologia discreta em Y. Chama-se topologia induzida à topologia menos fina para a qual f é contínua:

Definição 11.2. Dada $f : Y \to (X, \tau_X)$, chama-se topologia inicial, ou topologia induzida em Y, a

$$\tau_Y = \{f^{-1}(A) \,:\, A \in \tau_X\}$$

Exercício 11.1. Verifique que τ_Y é uma topologia, e que se $f : (Y, \tau) \to (X, \tau_X)$ é contínua, então $\tau_Y \subset \tau$.

Exemplo 11.1. Seja $Y \subset X$, $\imath : Y \to X$ a inclusão. Então a topologia inicial em Y é a topologia de subespaço.

Consideremos agora funções $f : (X, \tau_X) \to Y$. Se Y tiver a topologia indiscreta, f é automaticamente contínua. A topologia induzida é a topologia mais fina para a qual f ainda é contínua:

Definição 11.3. Dada $f : (X, \tau_X) \to Y$, chama-se topologia final, ou topologia induzida em Y, a

$$\tau_Y = \{A \,:\, f^{-1}(A) \in \tau_X\}$$

Exercício 11.2. Verifique que τ_Y é uma topologia, e que se $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau)$ é contínua, então $\tau \subset \tau_Y$.

Teorema 11.4. *Seja $f : X \to Y$ uma função tal que Y tem a topologia final. Então uma função $g : Y \to Z$ é contínua sse $g \circ f$ for contínua.*

Demonstração. Uma direcção é a continuidade da função composta. Provemos pois que $g \circ f$ contínua implica g contínua. Dado um aberto $A \subset Y$, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ é aberto logo, por definição de topologia final, $g^{-1}(A)$ é aberto. Logo f é contínua. □

O caso em que f é sobrejectiva é particularmente importante:

Definição 11.5. Seja $p : X \to Y$ uma função sobrejectiva tal que Y tem a topologia final induzida por f. Então chamamos a Y um quociente de X e a p uma função quociente.

O próximo teorema diz-nos como construir funções contínuas em quocientes:

Teorema 11.6. *Seja $p : X \to Y$ um quociente e seja $g : X \to Z$ uma função tal que $\underset{y \in Y}{\forall}$ g é constante em $p^{-1}(y)$. Então existe uma única função $\tilde{g} : Y \to Z$ tal que $g = \tilde{g} \circ p$. Mais, $\tilde{g}$ é contínua sse g for contínua.*

Demonstração. Dado $y \in Y$ escolhemos um ponto $x \in p^{-1}(y)$ e definimos $\tilde{g}(y) = g(x)$. Então $g = \tilde{g} \circ p$. Pelo teorema 11.4, $\tilde{g}$ é contínua sse g for contínua. Como p é sobrejectiva, $\tilde{g}$ é unicamente determinada por g. □

Dada uma relação de equivalência $\sim$ em X, o espaço topológico $X/_\sim$ é o quociente de X com a topologia final induzida pela projecção $\pi : X \to X/_\sim$.

Exercício 11.3. Seja $f : X \to Y$ uma função quociente. Então existe uma relação de equivalência $\sim$ em X e um homeomorfismo $h : X/_\sim \to Y$ tal que $f = h \circ \pi$.

12. Produtos

Dada uma família $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de espaços topológicos, seja $X = \prod_\alpha X_\alpha$. A topologia de Tychonoff, é a topologia menos fina tal que as projecções $\pi_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i)$ são contínuas:

Definição 12.1. A topologia produto, ou de Tychonoff, é a topologia τ gerada pela subbase $\mathcal{S} = \{\pi_\alpha^{-1}(A) \,:\, \alpha \in I,\, A \in \tau_\alpha\}$.

Exercício 12.1. Mostre que $\pi_\beta^{-1}(A) = A \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\alpha$.

Exercício 12.2. Seja $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ as projecções na primeira e segunda coordenadas. Mostre que $\pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) = A_1 \times A_2$. Conclua que $\mathcal{S}$ não é uma base de nenhuma topologia sobre $\mathbb{R}^2$.

É conveniente ter uma base para a topologia de Tychonoff:

Proposição 12.2. *A colecção de conjuntos*

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \,:\, U_\alpha \in \tau_\alpha,\, U_\alpha = X_\alpha \text{ excepto para um número finito de índices} \right\}$$

é uma base para a topologia de Tychonoff, τ.

Demonstração. Dados $\prod U_\alpha, \prod V_\alpha \in \mathcal{B}$, $(\prod U_\alpha) \cap (\prod V_\alpha) = \prod (U_\alpha \cap V_\alpha) \in \mathcal{B}$. Portanto $\mathcal{B}$ satisfaz as condições do teorema 1.4. Logo, $\mathcal{B}$ é uma base duma topologia τ' sobre X. Agora seja $U = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{B}$ e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ os índices para os quais $U_\alpha \neq X_\alpha$. Então

$$x \in U \Leftrightarrow \underset{\alpha \in I}{\forall}\ \pi_\alpha(x) \in U_\alpha \Leftrightarrow \underset{1 \leq j \leq n}{\forall}\ \pi_{\alpha_j}(x) \in U_{\alpha_j} \Leftrightarrow \underset{1 \leq j \leq n}{\forall}\ x \in \pi^{-1}_{\alpha_j}(U_{\alpha_j})$$

Logo $U = \pi^{-1}_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi^{-1}_{\alpha_n}(U_{\alpha_n})$. Mas então $\mathcal{S} \subset \mathcal{B} \subset \tau$. Logo $\tau' = \tau$. ☐

Exercício 12.3. Complete os detalhes da demonstração anterior: mostre que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B} \subset \tau$ e que isto implica $\tau = \tau'$.

Exercício 12.4. Seja $B = \pi^{-1}_{\alpha_1}(A_1) \cap \ldots \cap \pi^{-1}_{\alpha_n}(A_n)$ um elemento na base $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ associada à subbase $\mathcal{S}$. Mostre que $B = \prod U_\alpha$ em que $U_\alpha = X_\alpha$ para $\alpha \neq \alpha_j$ e

$$U_{\alpha_j} = \bigcap \{A_k \,:\, 1 \leq k \leq n \,,\, \alpha_k = \alpha_j\}$$

Conclua que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mathcal{S}$.

Teorema 12.3. *Uma função $f : Y \to \prod_\alpha X_\alpha$ é contínua sse $\underset{\alpha}{\forall}\ \pi_\alpha \circ f$ for contínua.*

Demonstração. Numa direcção é a continuidade da composta. Na outra direcção, usamos o teorema 9.5. Seja $S = \pi_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{S}$. Então $f^{-1}(S) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(A_i)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(A_i)$ que é aberto. Logo f é contínua. ☐

Teorema 12.4. *Sejam $A_\alpha \subset X_\alpha$. Então*

$$\overline{\prod_{\alpha \in I} A_\alpha} = \prod_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha$$

Demonstração.

($\subset$) Seja $x \in \overline{\prod A_\alpha}$. Então existe uma rede $x_\nu \to x$ com $x_\nu \in \prod A_\alpha$ logo $\pi_\alpha(x_\nu) \in A_\alpha$ e $\pi_a lpha(x_\nu) \to \pi_a lpha(x)$. Portanto $\pi_\alpha(x) \in \bar{A}_\alpha$ logo $x \in \prod \bar{A}_\alpha$.

($\supset$) Seja $x \in \prod \bar{A}_\alpha$. Dado $\prod U_\alpha \in \mathcal{V}_x$, $\pi_\alpha(x) \in U_\alpha$ logo $U_\alpha \cap A_\alpha \neq \emptyset$. Mas então $\prod U_\alpha \cap \prod A_\alpha = \prod (U_\alpha \cap A_\alpha) \neq \emptyset$. Concluímos que $x \in \overline{\prod A_\alpha}$. ☐

Teorema 12.5. *Uma rede (x_ν) em X converge para x sse $\underset{\alpha}{\forall}\ \pi_\alpha(x_\nu) \to \pi_\alpha(x)$.*

Demonstração. Se $x_\nu \to x$ então $\pi_\alpha(x_\nu) \to \pi_\alpha(x)$ por continuidade de π_α. Portanto assumimos que $\pi_\alpha(x_\nu) \to \pi_\alpha(x)$. Seja $U \in \mathcal{V}_x$. Podemos tomar $U = \prod_\alpha U_\alpha \in \mathcal{B}$. Queremos mostrar que existe um índice μ tal que para $\nu \geq \mu$ $x_\nu \in U$. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ os índices para os quais $U_\alpha \neq X_\alpha$. Então para $\alpha \neq \alpha_i$, $\pi_\alpha(x) \in U_\alpha$. Como $\pi_{\alpha_i}(x_\nu) \to \pi_{\alpha_i}(x)$, existem índices $\mu_1, \ldots, \mu_k$ tais que para $\nu \geq \mu_i$, $\pi_{\alpha_i}(x_\nu) \in U_{\alpha_i}$. Tomemos um elemento $\mu \geq \mu_1, \ldots, \mu_k$. Então, para $\nu \geq \mu$, $\pi_\alpha(x_\nu) \in U_\alpha$ para qualquer α logo $x_\nu \in \prod U_\alpha = U$. ☐

13. Conexos

Definição 13.1. Um espaço topológico X diz-se conexo se os únicos subconjuntos de X simultaneamente abertos e fechados são $\emptyset$ e X.

Definição 13.2. Uma separação de X é um par de abertos não vazios A, B tal que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$.

Proposição 13.3. *X é conexo sse não tiver nenhuma separação.*

Demonstração. Se X não é conexo existe um subconjunto aberto e fechado $A \neq \emptyset, X$. Então A, A^c é uma separação de X. Se A, B é uma separação de X então $A^c = B$ logo A é aberto e fechado. □

Proposição 13.4. *X é conexo sse as únicas funções contínuas $f : X \to \{0,1\}$ são as constantes.*

Demonstração. Se $f : X \to \{0,1\}$ não é constante, $(\, f^{-1}(0), f^{-1}(1)\,)$ é uma separação de X. Se A, B é uma separação de X, a função $f : X \to \{0,1\}$ com $f|_A = 0$ e $f|_B = 1$ é contínua. □

Teorema 13.5. *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então X é conexo sse X é um intervalo.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em duas partes:

($\Rightarrow$) Seja $X \subset \mathbb{R}$. Seja $a = \inf X, b = \sup X$. Suponhamos que existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $c \notin X$. Então o par $(\,]-\infty, c[\cap X\,,\,]c, +\infty[\cap X\,)$ é uma separação de X. Logo X não é conexo.

($\Leftarrow$) Seja $f : I \to \{0,1\}$ uma função contínua definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então o teorema do valor intermédio implica que f é constante. Logo I é conexo. □

Teorema 13.6. *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua, $A \subset X$ conexo. Então $f(A)$ é conexo.*

Demonstração. Dada uma função $g : f(A) \to \{0,1\}$, a função $g \circ f : A \to \{0,1\}$ é constante logo g é constante. □

Corolário 13.7 (Teorema do valor intermédio)**.** *Seja X um conjunto conexo, $f : X \to \mathbb{R}$. Então a imagem de X é um intervalo.*

Teorema 13.8. *Seja $A \subset X$ conexo. Então $\bar{A}$ é conexo.*

Demonstração. Seja $f : \bar{A} \to \{0,1\}$. f é constante em A. Podemos pois assumir que $f|_A = 0$. Seja $x \in \bar{A}$ e seja (x_ν) uma rede em A tal que $x_\nu \to x$. Então $0 = f(x_\nu) \to f(x)$ logo $f(x) = 0$ ($\{0,1\}$ é Hausdorff). Concluimos que f é constante igual a 0. Logo $\bar{A}$ é conexo. □

Exercício 13.1. Construa uma rede constante $x_\nu = x$ num espaço topológico X tal que $x_\nu \to y \neq x$.

Teorema 13.9. *Seja Y um espaço conexo, Seja $p : X \to Y$ um quociente tal que para todo o $y \in Y$, $p^{-1}(y)$ é conexo. Então X é conexo.*

Demonstração. Seja $f : X \times Y \to \{0,1\}$. Como $p^{-1}(y)$ é conexo, f é constante em $p^{-1}(y)$. Logo existe uma função contínua $\hat{f} : Y \to \{0,1\}$ tal que $f = \hat{f} \circ p$. y é conexo logo $\hat{f}$ é constante logo f é constante. □

14. Espaços conexos por arcos

Definição 14.1. Seja (X, τ) um espaço topológico, $a, b \in X$. Um arco, ou um caminho, de a para b, é uma função $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$. a e b são chamados os pontos inicial e final do arco γ.

Definição 14.2. Um espaço X diz-se conexo por arcos sse dados quaisquer $a, b \in X$ existe um arco em X de a para b.

Teorema 14.3. *Seja (X,τ) um espaço conexo por arcos. Então (X,τ) é conexo.*

Demonstração. Seja $f : X \to \{0,1\}$. Dados $x_0, x_1 \in X$ seja γ um arco de x_0 para x_1. Como $[0,1]$ é conexo, $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ é constante logo $f(x_0) = f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1) = f(x_1)$. Portanto f é constante logo X é conexo. □

Definição 14.4 (Concatenação)**.** Sejam $a, b, c \in X$. Seja γ_1 um arco de a para b e γ_2 um arco de b para c. A concatenção $\gamma_1 * \gamma_2$ de γ_1 com γ_2 é o arco de a para c definido por

$$\gamma_1 * \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Exercício 14.1. Mostre que $\gamma_1 * \gamma_2$ está bem definida e é contínua.

Teorema 14.5. *Sejam X, Y espaços conexos. Então $X \times Y$ é conexo. Se X, Y forem conexos por arcos, então $X \times Y$ é também conexo por arcos.*

Demonstração. A projecção $p : X \times Y \to Y$ é um quociente e $p^{-1}(y) = X \times \{y\}$ é conexo logo $X \times Y$ é conexo. Assumimos agora que X, Y são conexos por arcos. Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Então, como $x_1 \times Y$ é conexo por arcos existe um arco γ_1 de (x_1, y_1) para (x_1, y_2). Como $X \times y_2$ é conexo por arcos existe um arco γ_2 de (x_1, y_2) para (x_2, y_2). Então $\gamma_1 * \gamma_2$ é um arco de (x_1, y_1) para (x_2, y_2). □

Teorema 14.6. *Seja $\{A_i\}$ uma família de conjuntos conexos tal que $\forall_{i,j} A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Então $\bigcup_i A_i$ é conexo. Se A_i são conexos por arcos então $\bigcup_i A_i$ é conexo por arcos.*

Demonstração. Seja $f : \bigcup_i A_i \to \{0,1\}$, $x_0, x_1 \in \bigcup A_i$. Seja $x_0 \in A_i$, $x_1 \in A_j$. Tomemos $z \in A_i \cap A_j$. Então $f(x_0) = f(z) = f(x_1)$. Logo f é constante portanto $\bigcup_i A_i$ é conexo. Se A_i, A_j forem conexos por arcos, existem arcos γ_1 entre x_0 e z e γ_1 entre z e x_1 pelo que $\gamma_1 * \gamma_2$ é um arco de x_0 a x_1. Logo $\bigcup_i A_i$ é conexo por arcos. □

15. Componentes

Definição 15.1. Seja $x \in X$.

- A componente conexa de x, C_x, é a união de todos os conjuntos conexos que contêm x.
- A componente conexa por arcos de x, PC_x, é a união de todos os conjuntos conexos por arcos que contêm x.

Exercício 15.1. Mostre que C_x é conexo e PC_x é conexo por arcos.

Claramente, se A é conexo e $x \in A$ então $A \subset C_x$. Consequências imediatas são

- C_x é fechado: $\bar{C}_x$ é conexo logo $\bar{C}_x \subset C_x$.
- $PC_x \subset C_x$: PC_x é conexo.
- Se $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ então $C_x \cup C_y$ é conexo logo $C_x = C_x \cup C_y = C_y$.

Portanto

Teorema 15.2. *Os conjuntos C_x formam uma partição de x por conjuntos fechados.*

Exercício 15.2. Mostre que os conjuntos PC_x formam uma partição de X.

Definição 15.3. X é localmente conexo sse existir uma base $\mathcal{B}$ de abertos conexos. X é localmente conexo por arcos sse existir uma base $\mathcal{B}$ de abertos conexos por arcos.

Proposição 15.4. *Se X é localmente conexo então as componentes C_x são abertas. Se X é localmente conexo por arcos então as componentes PC_x são abertas.*

Demonstração. Seja $y \in C_x = C_y$. Então existe um $B \in \mathcal{B}$ com $y \in B$. Mas então B conexo implica $B \subset C_y$ logo C_y é aberto. A demonstração para PC_x é a mesma. □

Proposição 15.5. *Se X é localmente conexo por arcos então $C_x = PC_x$.*

Demonstração. Seja P a união das componentes conexas por arcos de C_x distintas de PC_x. Então P e PC_x são abertos disjuntos com $PC_x \cup P = C_x$. Como C_x é conexo, tem que se ter $P = \emptyset$ logo $C_x = PC_x$. □

Corolário 15.6. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um aberto. Então A é uma união de intervalos abertos disjuntos.*

Demonstração. Um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é localmente conexo. Escrevemos A como a união das suas componentes conexas. Estas são abertas e conexas logo são intervalos abertos. □

16. Compactos

Definição e Proposição 16.1. *Um espaço topológico (X, τ) é compacto sse se verificar uma das seguintes condições equivalentes:*

1. *Para qualquer colecção $\{U_\alpha\}$ de abertos tais que $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, existem índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $X = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$.*
2. *Dada uma colecção $\{F_\alpha\}$ de fechados, se para qualquer conjunto finito de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cup F_{\alpha_n} \neq \emptyset$, então $\bigcup_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$.*

Demonstração. Escrevamos (1) na forma

$$\underset{\{U_\alpha\} \subset \tau}{\forall} X = \bigcup_\alpha U_\alpha \Longrightarrow \left(\underset{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\exists} X = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n} \right)$$

Passando ao contrarecíproco temos

$$\underset{\{U_\alpha\} \subset \tau}{\forall} \left(\underset{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\exists} X \neq U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n} \right) \Longrightarrow X \neq \bigcup_\alpha U_\alpha$$

Passando ao complementar temos

$$\underset{\{U_\alpha\} \subset \tau}{\forall} \left(\underset{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\exists} \emptyset \neq U_{\alpha_1}^c \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}^c \right) \Longrightarrow \emptyset \neq \bigcap_\alpha U_\alpha^c$$

que é exactamente o conteúdo de (2). □

Exercício 16.1. Mostre que qualquer conjunto finito é compacto.

Teorema 16.2. *Seja $Y \subset X$ um subespaço. Então Y é compacto sse para qualquer colecção $\{U_\alpha\}$ de abertos de X tais que $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, existem índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $X = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$.*

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Se $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, $U_\alpha \in \tau_X$, então $Y = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap Y)$ logo $Y = (U_{\alpha_1} \cap Y) \cup \ldots \cup (U_{\alpha_n} \cap Y) \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$.

$\Leftarrow$ Se $Y \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$, $V_\alpha \in \tau_Y$, então para cada α $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$, $U_\alpha \in \tau_X$. Logo $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ portanto $Y \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$. Mas então $Y = (U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}) \cap Y = V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}$. $\square$

Exercício 16.2. Descreva os conjuntos compactos nas topologias discreta e indiscreta.

Teorema 16.3. *Seja X um espaço compacto, $Y \subset X$ fechado. Então Y é compacto.*

Demonstração. Se $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, então $X = Y^c \cup (\bigcup_\alpha U_\alpha)$ logo $X = Y^c \cup U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$. Mas então $Y \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$. $\square$

Teorema 16.4. *Seja $K \subset X$ compacto, $f : X \to Y$ contínua. Então $f(K)$ é compacto.*

Demonstração. Se $f(K) \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, então $K \subset \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$ logo $K \subset f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{\alpha_n})$. Portanto $f(K) \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$. $\square$

17. Espaços compactos de Hausdorff

Lema 17.1. *Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff, Sejam $K_1, K_2 \subset X$ compactos disjuntos. Então existem abertos disjuntos U_1, U_2 tais que $K_i \subset U_i$.*

Demonstração. Primeiro demonstramos o caso em que $K_1 = \{x\}$. Para cada $y \in K_2$ escolhemos abertos disjuntos V_y, W_y tais que $x \in V_y$ e $y \in W_y$. Então $K_2 \subset \bigcup_y W_y$ logo definimos $U_2 = W_{y_1} \cup \ldots \cup W_{y_n} \supset K_2$. Seja $U_1 = V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}$. Então $U_1 \in \mathcal{V}_x$. Seja $z \in U_2$. Então $z \in W_{y_j}$ para algum j logo $z \notin V_{y_j}$ logo $z \notin U_1$. Portanto $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Seja agora K_1 um compacto arbitrário. Para cada $x \in K_1$ escolhemos abertos disjuntos V_x, W_x com $x \in V_x$ e $K_2 \subset W_x$. Procedemndo do mesmo modo encontramos abertos disjuntos U_1, U_2 tais que $K_i \subset U_i$. $\square$

Corolário 17.2. *Seja X um espaço de Hausdorff, $K \subset X$ compacto. Então K é fechado.*

Demonstração. Dado $x \notin K$ existem abertos disjuntos U, V tais que $x \in U$ e $K \subset V$. Mas então $x \in U \subset K^c$ logo K^c é aberto. $\square$

Corolário 17.3 (Teorema de Weierstrass)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua, $K \subset X$ compacto. Então $f|_K$ tem máximo e mínimo em K.*

Demonstração. $\mathbb{R}$ é Hausdorff e $f(K)$ é compacto logo $f(K)$ é fechado. Como $f(K) \subset \bigcup_n]-n, n[$, existe um N tal que $f(K) \subset]-N, N[$. Agora basta recordar que um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado e fechado tem máximo e mínimo. $\square$

Corolário 17.4. *Seja Y um espaço compacto e X um espaço de Hausdorff. Então uma função $f : X \to Y$ contínua e injectiva é um mergulho.*

Demonstração. $f(X)$ é Hausdorff logo podemos assumir que f é bijectiva. Mostremos que f^{-1} é contínua. Seja $F \subset X$ um fechado. Então F é compacto logo $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ é compacto. Como Y é de Hausdorff $f(F)$ é fechado. Portanto f^{-1} é contínua logo f é um homeomorfismo. $\square$

18. Teorema de Tychonoff

Definição 18.1. Uma rede (x_ν) é universal sse, dado $C \subset X$, $x_\nu \in C$ eventualmente sse $x_\nu \in C$ frequentemente.

Para construir redes universais precisamos do seguinte lema da teoria dos conjuntos:

Lema 18.2 (Lema de Zorn)**.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma colecção de conjuntos tal que, dada uma subcolecção $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ totalmente ordenada $\bigcup \mathfrak{B} \in \mathfrak{A}$, isto é,*

$$\left(\underset{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathfrak{B}}{\forall} \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \text{ ou } \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1 \right) \Longrightarrow \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{B}} \mathcal{C} \in \mathfrak{A}$$

Então existe um conjunto $\mathcal{C}_M \in \mathfrak{A}$ maximal, isto é,

$$\underset{\mathcal{C} \in \mathfrak{A}}{\forall} \mathcal{C}_M \subset \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}_M$$

Corolário 18.3. *Existe uma colecção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tal que*

(i) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$
(ii) *Se $C \in \mathcal{C}$ então $x_\nu \in C$ frequentemente*
(iii) *Para qualquer $A \subset X$, $A \in \mathcal{C}$ ou $A^c \in \mathcal{C}$.*

Demonstração. Usamos o lema de Zorn. Seja

$$\mathfrak{A} = \{\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{C} \text{ satisfaz (i) e (ii)}\}$$

Dado $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ totalmente ordenado, seja $\mathcal{C} = \bigcup \mathfrak{B}$.

(i) Dados $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, existem $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathfrak{B}$ tais que $C_i \in \mathcal{C}_i$. Podemos assumir sem perca de generalidade que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. Então $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_2$. Como $\mathcal{C}_2$ satisfaz (ii), $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}$.
(ii) Dado $C \in \mathcal{C}$, existe um $\mathcal{C}_1 \in \mathfrak{B}$ tal que $C \in \mathcal{C}_1$. Logo $x_\nu \in C$ frequentemente.

Existe portanto um elemento $\mathcal{C}_M \in \mathfrak{A}$ maximal. Para concluir a demonstração basta verificar que dado $A \subset X$, $A \in \mathcal{C}_M$ ou $A^c \in \mathcal{C}_M$.

- Provemos que $X \in \mathcal{C}_M$. Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C} \cup \{X\}$. Então claramente $\mathcal{C} \in \mathfrak{A}$ e $\mathcal{C}_M \subset \mathcal{C}$ logo $\mathcal{C}_M = \mathcal{C}$.
- Seja $B \subset X$ Provemos que

$$\left(\underset{C \in \mathcal{C}_M}{\forall} x_\nu \in B \cap C \text{ frequentemente} \right) \Longrightarrow B \in \mathcal{C}_M$$

  Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M \cup \{B \cap C \,:\, C \in \mathcal{C}_M\}$. $\mathcal{C}$ satisfaz (i) e (ii) logo $\mathcal{C} \in \mathfrak{A}$. Portanto $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$. Mas $B = B \cap X \in \mathcal{C}$ logo $B \in \mathcal{C}_M$.
- Por absurdo suponhamos que $A, A^c \notin \mathcal{C}$. Então existem $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_M$ tais que (x_ν) não está frequentemente em $A \cap C_1, A^c \cap C_2$. Seja $C = C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}_M$. Então (x_ν) não está frequentemente em $A \cap C, A^c \cap C$. Logo (x_ν) não está frequentemente na união $(A \cap C) \cup (A^c \cap C) = C$ contradizendo $C \in \mathcal{C}_M$. □

Teorema 18.4. *São equivalentes*

(1) *X é compacto*
(2) *Qualquer rede universal em X converge*
(3) *Qualquer rede em X tem um sublimite*

Demonstração.

$1 \Rightarrow 2$ Seja X compacto e seja $(x_\nu) \subset K$ uma rede universal que não converge. Então x_ν não tem sublimites. Logo, para qualquer $x \in X$ existe um $U_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $x_\nu \notin U_x$ para ν suficientemente grande. $X = \bigcup_x U_x$ pelo que $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Então, para ν suficientemente grande x_ν não pertence a nenhum dos U_{x_k} o que é absurdo.

$2 \Rightarrow 3$ Seja $(x_\nu)_{\nu \in I}$ uma rede em X. Seja $J \subset I \times \mathcal{C}$ o subconjunto dos pares (ν, C) tais que $x_\nu \in C$. Definimos $y_{\nu,C} = x_\nu$. Mostremos que $(y_{\nu,C})$ é uma rede universal:

(a) J é um conjunto dirigido: dados $(\nu_1, C_1), (\nu_2, C_2) \in J$ existe um $\mu \geq \nu_1, \nu_2$. Como $C = C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$, $x_\nu \in C$ frequentemente logo existe um $\nu \geq \mu$ tal que $x_\nu \in C$. Portanto $(\nu, C) \in J$ e $(\nu, C) \geq (\nu_1, C_1), (\nu_2, C_2)$.

(b) Se $A \in \mathcal{C}$ então $(y_{\nu,C})$ está eventualmente em A: tomemos $x_\mu \in A$. Então $(\mu, A) \in J$ e se $(\nu, C) \geq (\mu, A)$, então $y_{\nu,C} = x_\nu \in C \subset A$.

(c) Reciprocamente, se $(y_{\nu,C})$ está frequentemente em A, então (y_ν) não está eventualmente em A^c logo $A^c \notin \mathcal{C}$ logo $A \in \mathcal{C}$.

Portanto

$$y_{\nu,C} \in A \text{ eventualmente} \Rightarrow y_{\nu,C} \in A \text{ frequentemente} \Rightarrow A \in \mathcal{C} \Rightarrow y_{\nu,C} \in A \text{ eventualmente}$$

Logo $(y_{\nu,C}$ é uma rede universal. Portanto $y_{\nu,C} \to x$. Mostremos que x é um sublimite de (x_ν). Seja $U \in \mathcal{V}_x$. Então $y_{\nu,C}$ está eventualmente em U logo $U \in \mathcal{C}$ logo (x_ν) está frequentemente em U.

$3 \Rightarrow 1$ Queremos provar que X é compacto. Seja $\{F_\alpha\}$ uma família de fechados tal que $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset$. Tomamos como conjunto de índices o conjunto dirigido

$$\mathcal{F} = \{F = F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n}\}$$

Para cada $F \in \mathcal{F}$ escolhamos um ponto $x_F \in F$. Seja x um sublimite de (x_F). Provemos que $\forall_\alpha x \in F_\alpha$ e que portanto Mostraremos que $x \in \bar{F}_\alpha = F_\alpha$ e que portanto $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$. Seja $U \in \mathcal{V}_x$. Como (x_F) está frequentemente em U, existe um $F \geq F_\alpha$ tal que $x_F \in U$. Mas $x_F \in F \subset F_\alpha$ pelo que $x_F \in U \cap F_\alpha \neq \emptyset$. □

Corolário 18.5 (Teorema de Tychonoff)**.** *Seja $\{X_\alpha\}$ uma família de espaços compactos. Então $X = \prod_\alpha X_\alpha$ é compacto.*

Demonstração. Seja (x_ν) uma rede universal em X. Então $(\pi_i(x_\nu))$ é uma rede universal em X_α uma vez que dado $C \subset X_\alpha$, $\pi_\alpha(x_\nu) \in U \Leftrightarrow x_\nu \in \pi_\alpha^{-1}(U)$. Logo $(\pi_i(x_\alpha))$ converge para um ponto $x_\alpha \in X_\alpha$. Então $x_\nu \to x = \prod_\alpha x_\alpha$. □

19. Conjuntos compactos em $\mathbb{R}^n$

Proposição 19.1. *O intervalo $[a, b]$ é compacto.*

Demonstração. Como $[a, b]$ é homeomorfo a $[0, 1]$ basta mostrar que $[0, 1]$ é compacto. Seja $\{U_i\}$ uma cobertura aberta de $[0, 1]$. Seja S o conjunto dos pontos $s \in [0, 1]$ tal que $[0, s]$ pode ser coberto por um número finito de U_i's. Queremos mostrar que $1 \in S$. Seja s o supremo de S. Então $\exists_i s \in U_i$ logo $\exists_\varepsilon]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subset U_i$. Tomemos um ponto $s_1 \in S \cap]s - \varepsilon, s]$. Então

$$[0, s_1] \subset U_{j_1} \cup U_{j_2} \cup \ldots \cup U_{j_k}$$

Mas então, para qualquer ponto $s_2 \in]s, s+\varepsilon[$,

$$[0, s_2] \subset U_i \cup U_{j_1} \cup U_{j_2} \cup \ldots \cup U_{j_k}$$

logo, se $s_2 \leq 1$, $s_2 \in S$. Como s é o supremo de S, concluimos que $s = 1$. $\square$

Corolário 19.2. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto sse é limitado e fechado.*

Demonstração. Se X é fechado e limitado, está contido num intervalo I. Como I é compacto e X é fechado, X é compacto. Se X é compacto, $X \subset \bigcup_n B_n(0)$. Tomando uma subcobertura finita, $X \subset B_n(0)$ logo X é limitado. Como $\mathbb{R}^n$ é Hausdorff, X é fechado. $\square$