I. Gráficos

1. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{cx} + 2\operatorname{sen}^4 x - 1 & x \geqslant 0 \\ \ln(1+x^2) + 3x & x < 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$;
(b) Mostre que f é contínua e calcule o valor da constante c de modo a f ser diferenciável na origem e calcule $f'(0)$.

2. Calcule as derivadas laterais em $x = 0$ da função $f(x) = \operatorname{arcsen}(1 - x^2)$. Qual o domínio de diferenciabilidade de f?

3. Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e a derivada da função $f(x) = \sqrt{\cosh x - 1}$. Quais as derivadas laterais de f em 0?

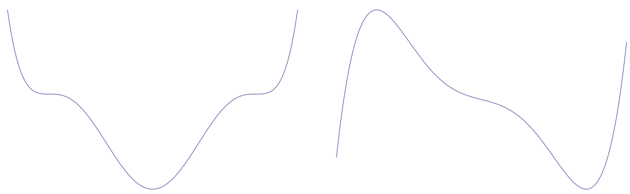
4. Considere a função $f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 - 1$.
(a) Determine os intervalos de monotonia de f.
(b) Estude a concavidade de f.
(c) Esboce o gráfico de f.

5. Esboce o gráfico duma função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável para $x \neq \pm 2$ cujos sinais das derivadas são:

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$

Será que a função f pode ser diferenciável em $x = \pm 2$?

6. A figura seguinte mostra os gráficos de duas funções.



(a) Indique em cada gráfico os pontos críticos, extremos locais e os pontos de inflexão.
(b) Sabendo que se trata de polinómios, qual o grau mínimo de cada polinómio?

7. Esboce, se possível, o gráfico duma função diferenciável $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
(a) f é crescente, convexa e minorada.
(b) f é crescente, convexa e majorada.

8. Estude a monotonia e a concavidade da função $f(x) = x^3 + a\,x$ em função de a. Esboce os gráficos para alguns valores representativos de a.

9. Determine as assímptotas da função $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

10. Esboce o gráfico duma função diferenciável $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f tem $y = x$ como assímptota à direita, $y = -x$ como assímptota à esquerda, f é côncava para $x > 1$ e convexa para $x < -1$.

11. Considere a função $f(x) = x \arctan x$.
(a) Determine o declive das assímptotas ao gráfico de f.

(b) Determine as assímptotas ao gráfico de f.

12. As seguintes funções são assimptóticas a x. Use esse facto e as assímptotas verticais para esboçar os seus gráficos.

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ (b) $x - \dfrac{1}{x^2}$

13. Estude as seguintes funções quanto a monotonia, concavidade e assímptotas, e use essa informação para esboçar o gráfico.

(a) e^{-x^2} (b) $\arctan(x^2)$ (c) $1/\ln x$ (d) $\mathrm{e}^{1/x}$

(e) $x + \dfrac{1}{x^2}$ (f) $\dfrac{|x|}{1-|x|}$ (g) $\dfrac{x}{1+\ln x}$ (h) $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

(i) $\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ (j) $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+2}$ (k) $x^2\mathrm{e}^{-x}$ (l) $x\mathrm{e}^{1/x}$

(m) $\arctan\Big(\dfrac{x}{x-1}\Big)$ (n) $x + 2\arctan(1/x)$ (o) $x^4\mathrm{e}^{-x}$ (p) $\dfrac{x}{2} + \ln(x+1) + \ln(x-1)$

14. Seja f uma função de classe C^2. Mostre que entre dois pontos críticos de f existe pelo menos um ponto de inflexão de f.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente e tal que $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

(a) Mostre que existe um único ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = 0$, e que $m \overset{\text{def}}{=} f(a)$ é o mínimo absoluto de f.

(b) Dado qualquer valor $b \in \,]m, +\infty[$, mostre que o conjunto $f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : f(x) = b\}$ tem exactamente dois elementos.

16. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com derivada $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e limitada, e tal que $g(0) = 0$. Considere a função $h : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = g(x)/x$ ($x \neq 0$). Mostre que h é uma função limitada em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e prolongável por continuidade ao ponto zero.

17. Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$ existe, então é igual a zero.

II. Primitivas

1. Verifique, derivando, que $\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$.

2. Determine uma primitiva (imediata) de cada uma das seguintes funções:

(a) $2x^2 + 3x^3$ (b) $\pi + \sqrt[5]{x^3}$ (c) $\left(\sqrt{x} + x\right)^2$

(d) e^{x+3} (e) 2^{x-1} (f) $\dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$

(g) $\dfrac{3}{x+3}$ (h) $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ (i) $\sqrt[3]{1-x}$

(j) $\dfrac{4}{1+4x^2}$ (k) $\cos(3x+1)$ (l) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$

(m) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x-1}}$ (n) $\dfrac{1}{(2x+1)^3}$ (o) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

(p) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}$ (q) $(x^2+1)^3$

3. Determine f sabendo que:

(a) $f'(t) = 2/\sqrt{1-t^2}\,, \quad -1 < t < 1\,, \quad f(\frac{1}{2}) = 4\,.$

(b) $f''(\theta) = \cos\theta\,, \quad f(0) = -3\,, \quad f'(0) = 2\,.$

(c) $f'(x) = \dfrac{1}{4-5x}\,, \quad f(0) = f(1) = 0\,.$

4. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, escrevendo-as na forma $f'\big(g(x)\big)g'(x)$:

(a) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ (c) $\dfrac{x}{4+x^2}$

(d) $x\cos(x^2+1)$ (e) $x^2 \operatorname{sen}(x^3+1)$ (f) $\dfrac{x^3}{x^8+1}$

(g) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ (h) $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ (i) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

(j) $\dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2}$ (k) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ (l) $\operatorname{sen}(x)\cos(\cos x)$

(m) $\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ (n) $\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$ (o) $\dfrac{\ln x}{x}$

(p) $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ (q) $\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ (r) $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{1+\mathrm{e}^x}$

(s) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ (t) $\dfrac{(\operatorname{arcsen} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}$ (u) $\dfrac{\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$

(v) $\dfrac{1}{x\ln x}$ (w) $(x-2)\mathrm{e}^{-x^2+4x}$ (x) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}$

(y) $\cos(x)\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$ (z) $\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)$

5. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{\sec^2(1/x^2)}{x^3}$ (b) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$ (c) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$

(d) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos^2(\mathrm{e}^x)}$ (e) $\dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$ (f) $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+\arctan x)}$

(g) $\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x+1}$ (h) $\tan x$ (i) $\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x}+2}$

(j) $\dfrac{\cosh x}{1+\operatorname{senh} x}$ (k) $2x(x^2+1)^3$ (l) $\sec^2(x)\mathrm{e}^{\tan x}$

(m) $\dfrac{\mathrm{e}^{\operatorname{argcosh} x}}{\sqrt{x^2-1}}$ (n) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ (o) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$

(p) $\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}$ (q) $\dfrac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x}$ (r) $\dfrac{1}{x\cos^2(\ln x)}$

(s) $\dfrac{\sec^2(\tan x)}{\cos^2 x}$ (t) $\dfrac{4x+3}{2x^2+3x}$ (u) $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}}$

(v) $\cos(x)\cosh(\operatorname{sen} x)$ (w) $\dfrac{3\operatorname{senh} x}{(1+\cosh x)^2}$ (x) $\sqrt{\dfrac{\operatorname{argsenh} x}{x^2+1}}$

(y) $\dfrac{x}{\sqrt{x^4-1}}$ (z) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$

6. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}$ (b) $\dfrac{\arctan(x)\cos(\arctan^2 x)}{1+x^2}$ (c) $\dfrac{\operatorname{sen} x\,\mathrm{e}^{\sqrt{\cos x}}}{\sqrt{\cos x}}$

(d) $\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)\operatorname{sen}^2(\mathrm{e}^x)$ (e) $\dfrac{x\cos(x^2)}{\operatorname{sen}^2(x^2)}$ (f) $\dfrac{\operatorname{sen}(1/x)\sqrt{\cos(1/x)+1}}{x^2}$

(g) $\dfrac{\sqrt{\arctan\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+x)}$ (h) $\operatorname{sen}(2x)\mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2 x}$ (i) $\dfrac{x\cos(x^2)}{\operatorname{sen}(x^2)\ln\big(\operatorname{sen}(x^2)\big)}$

7. Determine uma primitiva das funções seguintes, usando as relações

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1,\quad \sec^2 x-\tan^2 x=1,\quad \cosh^2 x-\operatorname{senh}^2 x=1$$

(a) $\dfrac{2}{1-\operatorname{sen}^2 x}$ (b) $\tan^2 x$ (c) $\operatorname{sen}^3 x$

(d) $\operatorname{sen}^3 x\cos^4 x$ (e) $\cos^3 x\operatorname{sen}^2 x$ (f) $\cos^3 x\operatorname{sen}^3 x$

(g) $4\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x$ (h) $\operatorname{senh} x\cosh^2 x$ (i) $3\cosh^3 x$

(j) $\cosh^2 x$ (k) $\tan^3 x+\tan^4 x$ (l) $\tan^2 x\sec^2 x$

(m) $\sec^4 x$ (n) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}$ (o) $\cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} x}$

8. Para cada uma das seguintes funções

$$f(x)=x\operatorname{sen}(x^2)\,,\quad g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{2+\mathrm{e}^x}\,,\quad h(x)=\frac{1}{(1+x^2)(1+\arctan^2 x)}$$

determine se possível:
(a) uma primitiva que se anule no ponto $x=0$;
(b) uma primitiva que tenda para 0 quando $x\to+\infty$.

9. Existe alguma primitiva de $1/\sqrt[3]{x}$ que não seja prolongável por continuidade a $x=0$?

10. Determine todas as primitivas da função $\sec^2 x$.

11. Mostre que todas as primitivas duma função ímpar $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são pares. O que acontece se f for par? E se $D_f=\mathbb{R}\backslash\{0\}$?