# I. Estudo de funções

**1.**

(a) Decrescente em $]-\infty,-1]$ e em $[1,+\infty[$. Crescente: $[-1,1]$.
Min. abs. em $x=-1$. Max. abs. em $x=1$. $D'=[-1,1]$.

(b) Decrescente em $]-\infty,-2]$ e em $]0,+\infty[$. Crescente: $[-2,0[$.
Min. abs. em $x=-2$. $D'=[-1/4,+\infty[$.

(c) Decrescente em $]-\infty,2]$ e em $[5/2,3]$. Crescente em $[2,5/2]$ e em $[3,+\infty[$.
Min. abs. em $x=2,3$. Max. rel. em $x=5/2$. $D'=[0,+\infty[$.

(d) Decrescente: $\left]0,\mathrm{e}^{-1}\right]$. Crescente: $\left[\mathrm{e}^{-1},+\infty\right[$.
Min. abs. em $x=\mathrm{e}^{-1}$. $D'=\left[-\mathrm{e}^{-1},+\infty\right[$.

(e) Decrescente: $[0,+\infty[$. Crescente: $]-\infty,0]$.
Max. abs. em $x=0$. $D'=]0,1]$.

(f) Decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,1]$. Crescente em $[1,+\infty[$.
Min. rel. em $x=1$. $D'=]-\infty,0[\,\cup\,[\mathrm{e},+\infty[$.

(g) Decrescente: $[1,+\infty[$. Crescente: $]-\infty,1]$.
Max. abs. em $x=1$. $D'=\left]-\infty,\mathrm{e}^{-1}\right]$.

(h) Decrescente: $[1,+\infty[$. Crescente: $]-\infty,1]$.
Max. abs. em $x=1$. $D'=\left]-\infty,\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$.

**2.** (a) $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-1)$
(b) $a=\pi/2$, $b=-1$
(c) $f'(x)=-1$ se $x\leqslant 0$, $f'(x)=-1/(1+x^2)$ se $x>0$.
(d) Estritamente decrescente em $\mathbb{R}$
(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $D'_f=]0,+\infty[$.

**3.** (a) $-\infty$
(b) $f'(x)=x/(x^2-1)$ se $-1<x<0$, $f'(x)=2x(1-x^2)\mathrm{e}^{1-x^2}$ se $x\geqslant 0$.
(c) Decrescente: $[1,+\infty[$. Crescente: $]-1,1]$. Max. absoluto em $x=1$.
(d) $D'_f=]-\infty,1]$
(e) $f''_e(0)=-1$, $f''_d(0)=2\mathrm{e}$.

**4.** (a) $a=-1$, $b=\pi/4-1$
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\pi/2$
(c) $g'(x)=\mathrm{e}^x-1$ se $x\leqslant 0$, $g'(x)=\dfrac{2\operatorname{senh} x}{1+(2\cosh x-1)^2}$ se $x>0$
(d) Decrescente: $]-\infty,0]$. Crescente: $[0,+\infty[$. Min. absoluto em $x=0$.
(e) $D'_g=[\pi/4,+\infty[$.

**5.** (a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$ se $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ se $x < 0$

(c) Estritamente crescente.

(d) $]-\infty, 0]$

**6.** Sugestão: estude o sinal de $f'$, notando que $\sec x \geqslant 1$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

**7.** (a) Sugestão: note que $f'$ é crescente e estude o sinal de $g'$.

(b) Sugestão: Teorema de Rolle.

**8.** (a) $f'(0) = 0$

(b) Sugestão: pode tomar $f(x) = x^2$ para $x \neq 0$.

**9.*** Sugestão: use o Teorema de Lagrange para a função $f$ em $[0, x]$ para mostrar que $g'(x) > 0$.

# II. Regra de Cauchy

**1.**

| | | |
|---|---|---|
| (a) $1$ | (b) $\ln 2$ | (c) $1$ |

**2.**

| | | |
|---|---|---|
| (a) $-7$ | (b) $1$ | (c) $\pi/2$ |
| (d) $-4$ | (e) $-1/4$ | (f) $-1$ |
| (g) $\sqrt{2}$ | (h) $0$ | (i) $1$ |
| (j) $4$ | (k) $\ln 2$ | (l) $1$ |
| (m) $1$ | (n) $0$ | (o) $-\infty$ |
| (p) $0$ | (q) $1/3$ | (r) $1/2$ |

**3.**

| | | |
|---|---|---|
| (a) $0$ | (b) $-\infty$ | (c) $1$ |
| (d) $-\infty$ | (e) $0$ | (f) $0$ |
| (g) $0$ | (h) $+\infty$ | (i) $0$ |
| (j) $0$ | (k) $+\infty$ | (l) $0$ |
| (m) $1$ | (n) $1/2$ | (o) $+\infty$ |

**4.** Sugestão: escreva a função na forma $e^{g(x)}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $0$ | (b) $0$ | (c) $0$ | (d) $0$ |

**5.**

| | | |
|---|---|---|
| (a) $1$ | (b) $1$ | (c) $1$ |
| (d) $e^{-1/2}$ | (e) $1$ | (f) $1$ |
| (g) $1$ | (h) $0$ | (i) $+\infty$ |
| (j) $1$ | (k) $e^{-1/6}$ | (l) $e^{-1}$ |
| (m) $1$ | (n) $1$ | (o) $+\infty$ |
| (p) $1$ | (q) $-1$ | (r) $1$ |

**6.**

| | | |
|---|---|---|
| (a) $+\infty$ | (b) $+\infty$ | (c) $0$ |
| (d) $1/2$ | (e) $1/2$ | (f) $2/e$ |
| (g) $+\infty$ | (h) $1$ | (i) $e^{3/2}$ |

**7.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $0$ | (b) $0$ | (c) $+\infty$ | (d) $1/3$ |
| (e) $0$ | (f) $2/3$ | (g) $0$ | (h) $0$ |

**8.**

(a) $-\infty$ (b) $-\infty$ (c) $+\infty$

**9.**

(a) 2 (b) $+\infty$ (c) $e/2$ (d) $e^3$

# III. Polinómio de Taylor

**1.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+3\Big(x+\frac{\pi}{12}\Big)+\frac{3^2}{2}\Big(x+\frac{\pi}{12}\Big)^2-\frac{3^3}{3!}\Big(x+\frac{\pi}{12}\Big)^3-\frac{3^4}{4!}\Big(x+\frac{\pi}{12}\Big)^4\right)$

**2.** (a) $p(x) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2$

(b) $f(x) - p(x) = -4c^{-5}(x-1)^3$ logo $f(x) > p(x)$ se $0 < x < 1$ e $f(x) < p(x)$ se $x > 1$.

(c) Sugestão: o gráfico de $p$ é a parábola que melhor aproxima $f$ para $x$ próximo de 1. Note que os gráficos de $f$ e de $p$ se cruzam duas vezes.

(d) $1/(1{,}05)^2 \approx 0{,}9075$ com erro $= 4c^{-5}(0{,}05)^3 < 4(0{,}05)^3 = 5 \cdot 10^{-4}$

**3.** (a) Sugestão: fórmula de Lagrange, notando que $\mathrm{e}^c < 1$.

(b) $\mathrm{e}^{-0,2} \approx 0{,}818\,733\,333\ldots$ (polinómio de ordem 4).

**4.**

(a) $x^5 = 32 + 80(x-2) + 10c^3(x-2)^2$. $(1{,}999)^5 \approx 31{,}92$ por defeito, erro $< 8 \cdot 10^{-5}$

(b) $\sqrt{x} = 10 + \dfrac{1}{20}(x-100) - \dfrac{1}{4c^{3/2}}(x-100)^2$. $\sqrt{100{,}3} \approx 10{,}015$ por excesso, erro $< 2{,}25 \cdot 10^{-5}$

(c) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(c)(x - \frac{\pi}{6})^2$. $\operatorname{sen}(29^\circ) \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360}$ por exceso, erro $< \left(\frac{\pi}{360}\right)^2$

(d) $\arctan x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{c}{(1+x^2)^2}(x-1)^2$.

$$\arctan(1{,}05) \approx \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \text{ por excesso, erro} < \frac{c(0{,}05)^2}{4} < \frac{1{,}05\cdot(0{,}05)^2}{4} = 0{,}00065625$$

**5.**

(a) $f' = f'' = f''' = 0$, $f^{(4)} = 4!$, mínimo local

(b) $f' = f'' = 0$, $f''' = 2$, $f^{(4)} = -6$, não é extremo

(c) $f' = f''' = f^{(4)} = 0$, $f'' = -2$, máximo local

(d) $f' = -1$, $f'' = f^{(4)} = 0$, $f''' = 6$, não é ponto crítico

(e) $f' = f'' = f^{(4)} = 0$, $f''' = 6$, $f^{(5)} = -5!$, não é extremo

(f) $f' = f^{(5)} = 0$, $f'' = -2$, $f''' = f^{(4)} = -6$, máximo local

**6.** Máximo local. $p(x) = 1 - x^4/24$.

**7.** (a) Para cada função existem $c_0$ entre 0 e $x$ e $c_1$ entre 1 e $x$ tais que

$\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{2c_0}x^3 = \mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}^2(x-1) + 2\mathrm{e}^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{2c_1}(x-1)^3$

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}(1+c_0)^{-3}x^3 = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(1+c_1)^{-3}(x-1)^3$

$\cos(\pi x) = 1 - \frac{1}{2}\pi^2x^2 + \frac{1}{6}\pi^3\operatorname{sen}(\pi c_0)x^3 = -1 + \frac{1}{2}\pi^2(x-1)^2 + \frac{1}{6}\pi^3\operatorname{sen}(\pi c_1)(x-1)^3$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(1+c_0)^{-5/2}x^3 = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(1+c_1)^{-5/2}(x-1)^3$

(b) $\mathrm{e}^{2x}$ : erro $< \mathrm{e}/6 < 1/2$. $\ln(1+x)$ : erro $< 1/24$. $\cos(\pi x)$ : erro $< \pi^3/48 < 1$.
$\sqrt{1+x}$ : erro $< 1/128$

**8.**

(a) $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ (b) $\mathrm{e}\big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4\big)$

**9.**

(a) $-12 + 2(x-3) + (x-3)^2$

(b) $18 + 24(x-3) + 9(x-3)^2 + (x-3)^3$

(c) $81 + 108(x-3) + 54(x-3)^2 + 12(x-3)^3 + (x-3)^3$

**10.** Ordem 3: $\mathrm{e}^{0,1} \approx 1{,}105\,166\,666\ldots$ com erro $= \frac{\mathrm{e}^c}{4!}10^{-4} < \frac{\mathrm{e}^{0,1}}{4!}10^{-4} < \frac{3}{4!}10^{-4} < 10^{-4}$

**11.**

(a) Sugestão: use o polinómio de Taylor de ordem 2 e note que $\mathrm{e}^{-c} < 1$

(b) Sugestão: use o polinómio de Taylor de ordem 4

**12.** $\big|f(x) - p(x)\big| = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2c}|x-1|^3 < \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}}\big(\frac{1}{2}\big)^3 = \frac{1}{6\mathrm{e}} < \frac{1}{12}$

**13.** $2 - x + \frac{3}{2}x^2$

**14.** Sugestão: escreva a fórmula de Taylor de ordem $n$ com resto de Lagrange.

**15.** Sugestão: escreva a fórmula de Taylor de ordem 2 com resto de Lagrange no ponto $a$ e substitua $x = a + h$ e $x = a - h$.

**16.***