I. Estudo de funções

1. Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos e o contradomínio das funções seguintes:

(a) $\dfrac{x}{x^2+1}$ (b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ (c) $|x^2-5x+6|$

(d) $x\ln x$ (e) e^{-x^2} (f) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

(g) $x\mathrm{e}^{-x}$ (h) $\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$

2. Considere a função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} a+bx & \text{se } x\leqslant 0\\ \arctan(1/x) & \text{se } x>0\end{cases}$$

(a) Escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
(b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e de b.
(c) Determine o domínio de diferenciabilidade de f, calcule f' e diga se a função f é de classe C^1 em $\mathbb{R}$.
(d) Estude f quanto a monotonia e extremos.
(e) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, e determine o contradomínio de f.

3. Considere a função $f\colon\ ]1,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \ln\sqrt{1-x^2} & -1<x\leqslant 0\\ x^2\mathrm{e}^{1-x^2} & x>0\end{cases}$$

(a) Determine $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.
(b) Estude f quanto à diferenciabilidade e calcule f'.
(c) Estude f quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.
(d) Determine o contradomínio de f.
(e) Mostre que não existe $f''(0)$ e que f'' muda de sinal em 0.

4. Considere a função $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x+ax+b & \text{se } x\leqslant 0\\ \arctan(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-1) & \text{se } x>0\end{cases}$$

onde a e b são constantes reais.
(a) Determine a e b sabendo que g tem derivada finita em $x=0$.
(b) Determine $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
(c) Estude g quanto à diferenciabilidade e calcule g'.
(d) Estude g quanto à existência de extremos e de intervalos de monotonia.
(e) Determine o contradomínio de g.

5. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \arctan|x|$.

(a) Calcule ou mostre que não existem: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

(c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo relativo, classificando-os quanto a serem máximos ou mínimos, absolutos ou relativos.

(d) Determine o contradomínio da restrição de f ao intervalo $]-\infty, 0]$.

6. Seja g uma função diferenciável tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e g' é uma função estritamente monótona. Define-se

$$f(x) = 2\tan\big(g(x)\big) - g(x)$$

Mostre que f possui um extremo local em $x = 0$.

7. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$.

(a) Determine e classifique os extremos locais da função g.

(b) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $g''(x) = 0$?

8. Seja f uma função definida numa vizinhança de zero $V_\varepsilon(0)$ diferenciável em $V_\varepsilon(0)\backslash\{0\}$ e tal que $xf'(x) > 0$ para todo o $x \in V_\varepsilon(0)\backslash\{0\}$.

(a) Supondo que f é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de f e indique se é máximo ou mínimo. No caso de f ser diferenciável em 0 qual será o valor de $f'(0)$?

(b) Mostre por meio dum exemplo que sem a hipótese da continuidade de f no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de f.

9.* Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = f(x)/x$ é crescente para $x > 0$.

II. Regra de Cauchy

1. Calcule, se existirem, os limites das seguintes sucessões em $\overline{\mathbb{R}}$:

(a) $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}$ (b) $n(\sqrt[n]{2}-1)$ (c) $\cos^n(1/n)$

2. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-6x^2+11x-6}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{\arctan x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\tan(\pi\, x/4)-1}{\ln x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+2x-4}{2x^3-x^2+3x-1}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x\tan(2x)}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(1/x)-(\pi/2)}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\pi\ln x+\operatorname{sen}(\pi x)}{\cos\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)\arctan(x)}{x\ln(1+x)}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x\operatorname{sen} x)^2}{(\cos x-1)^2}$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{10^x-5^x}{\operatorname{sen} x}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(2x)-2\operatorname{arcsen}(x)}{x^3}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\operatorname{sen}(1/x^2)}{\arctan(1/x^2)}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$ (q) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh}(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}$ (r) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)-\cos(x)}{x^2(x+2)}$

3. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\mathrm{e}^x\Big(\arctan x-\frac{\pi}{2}\Big)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\,\cos(\arctan x)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x\ln x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)\ln(1+x)}{\sec x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\big(\tan x-\sec x\big)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\mathrm{e}^{1/x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\mathrm{e}^{1/x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\ln(x)\ln(\ln x)$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\operatorname{sen}(1/x)\arctan(x)\mathrm{e}^x$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\big(\ln(\operatorname{sen} x)-\ln(\operatorname{arcsen} x)\big)$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\operatorname{arcsen}(1/x)$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\big(1-\cos(1/\sqrt{x}\,)\big)$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\mathrm{e}^x\operatorname{sen}(1/x)$

4. Calcule os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2^x\mathrm{e}^{-x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\exp\big(-(\ln x)^2\big)}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2}}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2\mathrm{e}^{\ln^2 x}}$

5. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/(x-1)}$ (b) $\lim\limits_{x\to1^+} x^{\ln(\ln x)}$ (c) $\lim\limits_{x\to0}(\tan x)^{\operatorname{sen} x}$

(d) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$ (e) $\lim\limits_{x\to0}(-\ln x)^{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{sen}(1/x)}$

(g) $\lim\limits_{x\to0}\big(1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(1/x)\big)^{\operatorname{sen} x}$ (h) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotan} x}$ (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{(2\arctan x)/\pi}$

(j) $\lim\limits_{x\to0}(\sec x-1)^{x}$ (k) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$ (l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{1/\ln x}$

(m) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^{x}$ (n) $\lim\limits_{x\to1}\left(\ln x\right)^{\operatorname{sen}(\pi x)}$ (o) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\ln x\right)^{\operatorname{cotan} x}$

(p) $\lim\limits_{x\to-\infty}\big((\pi/2)+\arctan x\big)^{1/x}$ (q) $\lim\limits_{x\to0^+}\big(x^{(x^x)}-1\big)$ (r) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{(x^x-1)}$

6. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{x}-x^2+\cos x\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+\ln x+x}{3^x+x^5+2}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+\ln x}}{2x+\operatorname{sen} x}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+2x}+x^2}{(\sqrt{x}+\ln x)^2(2x+\frac{1}{x})}$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2^x+x^2)}{x(\mathrm{e}^x+1)^{1/x}}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\big(\ln x+\cos(1/x)\big)(1+x)}{x^{-1}+1+x}$ (h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt[5]{x^3+3}+\sqrt{x^2+1}}{\big(\sqrt[5]{x^2+1}+1\big)^4}$ (i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+3x+5}}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+x}}$

7. Calcule os limites das seguintes sucessões:

(a) $\dfrac{n^{1000}}{1{,}0001^n}$ (b) $\dfrac{4^n+n^4}{2^n+n!}$ (c) $\dfrac{n^n}{n!+n^4+2}$ (d) $\dfrac{2^{n+1}+3^n}{n+3^{n+1}}$

(e) $\dfrac{4^n}{(n^2)^4+4^{n^2}}$ (f) $\dfrac{2n^2+(-1)^n}{3n^2+\ln n}$ (g) $\dfrac{n^2+(-1)^n}{2^n+n}$ (h) $\dfrac{n!+(-2)^n}{(n+1)!+3}$

8. Calcule os limites das seguintes sucessões:

(a) n^2-2^n (b) $3^n-(2n)!$ (c) $n!-n^{1000}$

9. Calcule os limites das seguintes sucessões sem usar a regra de Cauchy.

(a) $\sqrt[n]{2^n+n^2}$ (b) $\dfrac{(n+2)\sqrt{n^3+5}}{n\sqrt[3]{n+1}+5^{-n}}$ (c) $\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+n^2)}{2n}$ (d) $(2+n^3)^{1/\ln n}$

III. Polinómio de Taylor

1. Escreva o polinómio de Taylor $p(x)$ de ordem 4 da função $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ no ponto $x = -\pi/12$.

2. Seja $f(x) = x^{-2}$.

(a) Determine o polinómio de Taylor $p(x)$ de ordem 2 de f no ponto $x = 1$.

(b) Escreva a fórmula de Taylor com resto de Lagrange e use-a para estudar o sinal de $f(x)-p(x)$ no intervalo $]\,0\,,\,+\infty\,[$.

(c) Esboce os gráficos de $f(x)$ e $p(x)$.

(d) Use $p(x)$ para calcular aproximadamente $1/(1{,}05)^2$ e indique um majorante do erro cometido na aproximação.

3. Seja p_n o polinómio de Taylor de ordem n de e^x em $x = 0$.

(a) Mostre que, para $x < 0$,

$$\left|\mathrm{e}^x - p_n(x)\right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) Aproveite para calcular $\mathrm{e}^{-0.2}$ com precisão de 5 casas decimais.

4. Use a recta tangente para calcular aproximadamente as seguintes expressões. Em cada caso escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange e use-o para estimar o valor do erro cometido e determine se a aproximação é por excesso ou por defeito.

(a) $(1{,}999)^5$ (b) $\sqrt{100{,}3}$ (c) $\operatorname{sen}(29^\circ)$ (d) $\arctan(1.05)$

5. Seja f uma função n vezes diferenciável e seja p o seu polinómio de Taylor de ordem n no ponto $a \in D_f$. Em cada um dos casos determine as derivadas $f^{(k)}(a)$ para $k = 1, \dots, n$ e verifique se f tem ou não um ponto crítico no ponto a, classificando-o.

(a) $p(x) = 1 + x^4, \quad n = 4, \quad a = 0$

(b) $p(x) = -1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4, \quad n = 4, \quad a = 0$

(c) $p(x) = -2 + 2x - x^2. \quad n = 4, \quad a = 1$

(d) $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3, \quad n = 4, \quad a = -1$

(e) $p(x) = x^3 - x^5, \quad n = 5, \quad a = 0$

(f) $p(x) = \frac{1}{2}x^2\big(1 - \frac{1}{2}x^2\big), \quad n = 5, \quad a = 1$

6. Verifique que a função $f(x) = \frac{1}{2}x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ tem um ponto crítico na origem e classifique-o. Escreva o polinómio de Taylor de ordem 4 de f na origem.

7. Considere as funções

$$\mathrm{e}^{2x}\,, \qquad \ln(1+x)\,, \qquad \cos(\pi x)\,, \qquad \sqrt{1+x}$$

(a) Determine a fórmula de Taylor de ordem 2 destas funções com resto de Lagrange relativa aos pontos $a = 0$ e $a = 1$.

(b) Para $a = 0$, determine estimativas para o erro cometido ao aproximar a função dada pelo polinómio de Taylor obtido no intervalo $]0, 1[$.

8. Determine os poliunómios de Taylor em $a = 0$ de ordem n das seguintes funções:

(a) $\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,, \quad n = 3$ (b) $\mathrm{e}^{\cos x}\,, \quad n = 5$

9. Use o polinómio de Taylor para escrever cada um dos seguintes polinómios como um polinómio em potências de $(x-3)$.

(a) x^2-4x-9 (b) x^3-3x (c) x^4

10. Determine $\mathrm{e}^{0,1}$ com erro inferior a 10^{-4} sem usar calculadora.

11. Use a fórmula de Taylor em $a=0$ com resto de Lagrange para mostrar que:

(a) $\left|\mathrm{e}^{-x}-\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{6}$ para $x \in [0,1]$

(b) $\left|\operatorname{sen} x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)\right| \leqslant 0{,}01$ para $x \in [0,1]$

12. Determine, para $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, um majorante do erro que se comete ao aproximar $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}x$ pelo seu polinómio de Taylor de ordem 2 em $a=1$.

13. Sejam f uma função 3 vezes diferenciável e g definida por $g(x)=f(\mathrm{e}^x)$. Dado que o polinómio de Taylor de ordem 2 de f relativo ao ponto $a=1$ é

$$3-x+2(x-1)^2$$

determine o polinómio de Taylor de ordem 2 em $a=0$ de g.

14. Prove que se uma função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é $(n+1)$–vezes diferenciável e $f^{(n+1)}(x)=0$ para todo o $x\in\mathbb{R}$ então f é um polinómio de grau menor ou igual a n.

15. Seja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função 3 vezes diferenciável. Use a fórmula de Taylor para mostrar que, para qualquer $a\in\mathbb{R}$, se tem

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

16.* Seja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e considere a função g definida por $g(x)=xf(x)$ para todo o $x\in\mathbb{R}$. Se g'' é estritamente crescente e $g''(0)=0$, prove que $f(0)$ é mínimo absoluto de f. Sugestão: escreva a fórmula de Taylor em $a=0$ de ordem 1 de g com resto de Lagrange e use-a para determinar o sinal de $f(x)-f(0)$.