Derivadas

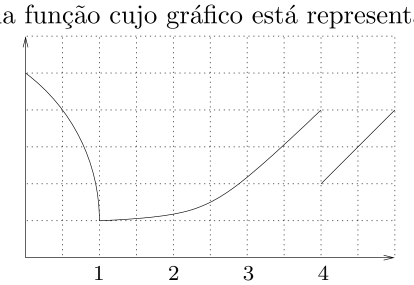
1. Esboce o gráfico duma função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(1) = 0$, $f'_e(0) = -1$, $f'_d(0) = 0$, $f'_e(1) = +\infty$ e $f'_d(1) = -\infty$.

2. A tabela seguinte representa alguns valores duma função diferenciável $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	0.7	1.1	1.9	3.4

(a) Qual a taxa de variação de f no intervalo $[0.1, 0.4]$?
(b) Assumindo que a informação na tabela é representativa do comportamento da função, estime a derivada de f no ponto $x = 0.25$.

3. Esboce o gráfico da derivada da função cujo gráfico está representado na figura seguinte:



4. Usando a definição de derivada, calcule as derivadas laterais das seguintes funções na origem:

(a) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)\cos(\pi x)\mathrm{e}^{x^2-1}}{\arccos x}$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$

5. Determine as derivadas laterais no ponto 0 da função f contínua em $\mathbb{R}$ cujos valores para $x \neq 0$ são dados por

$$f(x) = x\frac{1+\mathrm{e}^{1/x}}{2+\mathrm{e}^{1/x}}$$

6. Se possível, esboce o gráfico duma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
(a) $f(0^+) = 1$, $f(0^-) = -1$ e $f'(0) = 0$.
(b) $f'(0^+) = f'(0^-) = 1$ e f não é contínua em 0.

7. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leqslant 0 \\ 1 + (2\operatorname{sen}^2 x)/x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Calcule as constantes a e b por forma a que f seja diferenciável no ponto 0.
(b) Para esses valores de a e b determine a equação da recta tangente ao gráfico de f em cada ponto $c \leqslant 0$.

8. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função tal que $f(x) = x^2(x-1)$ para $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Determine os pontos em que f é diferenciável e calcule $f'(x)$.

9. Calcule as derivadas das funções:

(a) $\dfrac{1}{x-1}$ (b) $\dfrac{2x}{(x+1)^2}$ (c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

(d) $x^{3/2}\mathrm{e}^x$ (e) $x^2 2^x$ (f) $\tan x - x$

(g) $\dfrac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$ (h) $\operatorname{sen}(x)\cos(x)\tan(x)$ (i) $\dfrac{1}{1+\operatorname{cotan} x}$

(j) $x^2(1+\ln x)$ (k) $\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$

10. Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 5^x$ (b) $\arctan(3-2x) + \tan(1/x)$

(c) $\arccos(4-x) + \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ (d) $(2-x^2)\cos(x^2) + 2x\operatorname{sen}(x^3)$

(e) $\cos(\operatorname{arcsen} x)$ (f) $\arctan(x^4) - \arctan^4 x$

11. Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e a derivada das seguintes funções:

(a) $\dfrac{x-1}{x^2+3}$ (b) $x\sqrt[3]{x^2+1}$ (c) $x\operatorname{sen}(x^2)$ (d) $\ln(x\operatorname{senh} x)$

(e) $\operatorname{arcsen}(\arctan x)$ (f) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$ (g) $\ln\Big(\operatorname{arcsen}\Big(\dfrac{x+1}{x-1}\Big)\Big)$

12. Calcule $f'(x)$, sendo a função f definida pela expressão:

(a) $\sqrt{\sqrt{x}+1}\,\ln x$ (b) $\left(\dfrac{-2x+1}{x^2}\right)^{2/3}$ (c) $\dfrac{x^{1/3}}{(x^2-1)^2}$ (d) $\dfrac{1}{\big(1+\sqrt{x}\big)^{3/5}}$

(e) $\big(2+\sqrt{8+x^2}\,\big)^2$ (f) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^3)^4}$ (g) $1/\sqrt{3x+\sqrt[3]{2x}}$ (h) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

13. Calcule $f'(x)$, sendo a função f definida pela expressão:

(a) $\sqrt{\arccos x}\,\ln x$ (b) $3^x\tan(x^2)$ (c) $\cos(\mathrm{e}^x)\sec(x)$

(d) $\operatorname{arcsen}(x^4)\operatorname{sen}(x)$ (e) $2^{\sqrt{x}}\cosh x$ (f) $\ln(x)\,\operatorname{senh}(x^3)$

(g) $\dfrac{\arctan x}{2+\cos\sqrt{x}}$ (h) $\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ (i) $\dfrac{\exp(x^2)}{\sec x}$

(j) $\dfrac{x+\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x^5)}$ (k) $\dfrac{x\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+x^2}}$ (l) $\ln x\dfrac{x^2+\tan x}{\exp x + 2\sqrt{x}}$

(m) $\ln(x\operatorname{arcsen} x)$ (n) $\operatorname{arcsen}(\arctan x)$ (o) $4^x\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

(p) $\exp(\arctan x\,\tan x)$ (q) $\tan(\sqrt{x}\ln x)$ (r) $\tan(\mathrm{e}^x\sec x)$

(s) $\sqrt{\operatorname{arcsen} x\,\operatorname{sen} x}$ (t) $\sqrt{\mathrm{e}^x/\ln x}$ (u) $5^{(x+1)/(x-1)}$

(v) $\operatorname{sen}(\cos^2 x)\cos(\operatorname{sen}^2 x)$

14. Calcule $f'(x)$, sendo a função f definida pela expressão:

(a) $\operatorname{sen}\big(\ln(x^3-1)\big)$ (b) $3\operatorname{arcsen}\sqrt{x^2-1}$ (c) $\arctan^2\big(\operatorname{sen}(x^2+1)\big)$ (d) $\operatorname{sen}^3\sqrt{x}$

(e) $\operatorname{sen}^{10}(x^{10})$ (f) $\sqrt{\cos(\mathrm{e}^x)}$ (g) $\operatorname{sen}\big(\cos(2^x)\big)$ (h) $\operatorname{sen}(\ln^4 x)$

(i) $\cos\big(\tan^2(x^2)\big)$ (j) $\operatorname{sen}\big(\sqrt{\sec x}\big)$ (k) $\tan^{10}(\sec x)$ (l) $\exp(\sqrt{\operatorname{sen} x}\,)$

(m) $\big(\ln(\cos x)\big)^{-3/5}$ (n) $\ln^4(\sec^4 x)$ (o) $\ln^2(\tan^6 x)$ (p) $\sqrt{\tan\sqrt{x}}$

(q) $\sec^{10}(\tan x)$ (r) $\ln\big(\tan(\mathrm{e}^x)\big)$ (s) $\sqrt{\operatorname{senh}(1/x^2)}$ (t) $\sqrt{\cosh(1/x^3)}$

15. Calcule $f'(x)$, sendo a função f definida pela expressão:

(a) $x^{\sqrt{x}}$ (b) $(\tan x)^{\arctan x}$ (c) $(\operatorname{arcsen} x)^{\cos x}$ (d) $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

(e) $(\ln x)^x$ (f) $(\arctan x)^{\operatorname{arcsen} x}$ (g) $x^{(x^{x-1})}$

16. Calcule as derivadas das seguintes funções, indicando em que pontos elas são diferenciáveis.

(a) $x|x|$ (b) $|x|/x$ (c) $e^{x-|x|}$

(d) $e^{-|x|}$ (e) $\ln|x|$ (f) $|x|\operatorname{sen} x$

17. A tabela seguinte representa alguns dos valores duma função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injectiva e diferenciável:

x	1	3	5	7	9	11
$f(x)$	1	2	3	5	7	11
$f'(x)$	9	7	2	3	5	11

Usando os valores nesta tabela
(a) Calcule a derivada de $f(x^2)$ em $x = 3$.
(b) Calcule a derivada de $f^{-1}(x)$ em $x = 5$.
(c) Calcule a derivada de $f \circ f(x)$ em $x = 5$.
(d) Calcule a derivada de $f^{-1}(x^2-2)$ em $x = 3$.

18. Calcule o seguinte limite, interpretando-o como uma derivada: $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\big(\operatorname{sen} x/x\big)-(2/\pi)}{x-(\pi/2)}$

19. Sabendo que $f'(x) = \cos(x^2)$ calcule a derivada de $3f(\cos x) - f(x^3+1)$.

20. Determine a derivada da função g em termos de f' se:

(a) $g(x) = f(x^2)$ (b) $g(x) = f\big(\operatorname{sen}^2 x\big) + f\big(\cos^2 x\big)$ (c) $g(x) = \arctan\big(f(x)\big) + f(\arctan x)$

(d) $g(x) = f\big(f(x)\big)$ (e) $g(x) = (f \circ f \circ f)(x)$

21. Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $\ln(x \operatorname{senh} x)$ (b) $\dfrac{e^x}{1+x}$

22. Seja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(0) = f(\pi) = 0$ e seja $g(x) = f(\operatorname{sen} x)+\operatorname{sen}\big(f(x)\big)$. Mostre que

$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)$$

23. Seja $f(x) = \ln(1+\sqrt{x}\,)$ e seja $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função injectiva, diferenciável tal que $g(1) = 4$, $g'(1) = 3$ e $g(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $h(x) = f\big(g(x)\big)$.
(a) Justifique que h é diferenciável em 1 e calcule $h'(1)$.
(b) Justifique que h é injectiva e que a sua função inversa h^{-1} é diferenciável em $\ln 3 = h(1)$. Calcule $(h^{-1})'(\ln 3)$.

24. Seja $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e estritamente monótona com $g(0) = 2$ e $g'(0) = \frac{1}{2}$. Considere a função $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(\operatorname{arcsen} x)$.
(a) Justifique que f é diferenciável em $]-1,1[$ e calcule $f'(0)$.
(b) Justifique que f é injectiva e, sendo f^{-1} a função inversa, calcule $(f^{-1})'(2)$.

25. Considere uma função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciável, injectiva e com contradomínio $]-1,1[$, tal que $f(2) = 0$ e $f'(2) = 2$ e seja $g(x) = \arccos\big(f(x)\big)$.
(a) Justifique que g é injectiva e, sendo g^{-1} a função inversa de g, determine $g'(2)$ e $(g^{-1})'(\pi/2)$.
(b) Determine o domínio de g^{-1} e justifique que g^{-1} não é limitada.

26. Sendo $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $f\colon\ ]0,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{g(\ln x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $f'(1)$ e $f''(e)$.

27. Sendo $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 e^{-x}$ para todo o x, e sendo $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciável, calcule $(g\circ f)'(x)$ em termos da função g'.

28. Mostre que

$$(\operatorname{argsenh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

de duas formas distintas:

(a) usando o teorema da derivação da função inversa;

(b) derivando as expressões

$$\operatorname{argsenh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\,\bigr) \qquad \operatorname{argcosh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\,\bigr)$$

Teoremas fundamentais

29. Encontre os valores máximo e mínimo das seguintes funções nos intervalos indicados:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 3, \quad x \in [0, 2]$ (b) $f(x) = |x - 1|, \quad x \in [-1, 2]$ (c) $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in [-1, 2]$

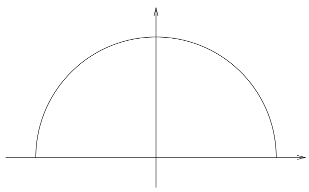
30. Um agricultor tem 800 m de vedação e pretende vedar uma região rectangular usando como um dos lados uma parede já existente. Quais as dimensões do rectângulo que maximizam a área?

31. Explique qual o erro no seguinte raciocínio: Seja $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4+3}$. Então f é diferenciável com derivada

$$f'(x) = -\frac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^4+3)^2}$$

que se anula nos pontos $-1, 0, 1$. Comparando os valores de f nesses pontos vemos que o valor máximo de f é $f(-1) = f(1) = 1/2$ e o valor mínimo de f é $f(0) = 1/3$.

32. A figura seguinte representa o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, que é a metade superior duma circunferência de raio um:



(a) Verifique se f está nas condições do teorema de Lagrange.

(b) Usando apenas geometria, encontre um $c \in]0, 1[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$.

33. Esboce o gráfico duma função contínua $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f'(x) \neq 1$ para todo o x. Explique porque é que a existência de tal função não contradiz o teorema de Lagrange.

34. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$ mas a derivada de f não se anula em $[-1, 1]$. Justifique que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

35. Mostre que a equação $x^5 + 5x = 5$ tem exactamente uma solução.

36. Mostre que a equação $\cos x = 2x + 3$ tem exactamente uma solução.

37. Mostre que:

(a) a equação $3x^2 = \mathrm{e}^x$ tem exactamente três soluções.

(b) o polinómio $p(x) = x^6 - 4x^4 + 2$ tem exactamente quatro zeros (sugestão: é par).

38. Use o Teorema de Lagrange em intervalos adequados para provar as seguintes relações:

(a) $(x - 1)/x < \ln x < x - 1$ para $x > 1$ e para $0 < x < 1$.

(b) $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ para $x \in \mathbb{R}$.

(c) $x < \tan x$ para $0 < x < \pi/2$.

(d) $\arctan x < x + \frac{\pi}{4} - 1$ para $x > 1$.

39. Seja $f\colon\ ]0, 1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1/n) = 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Diga justificando se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa.

(a) Para qualquer $n \geqslant 2$, a função f tem necessariamente máximo no intervalo $[1/(n + 1), 1/n]$.

(b) A função f é necessariamente limitada.

(c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.

40. Aplicando o teorema de Lagrange ao intervalo $[0, x]$ mostre sucessivamente que
(a) $0 < \operatorname{sen} x < x$
(b) $-x^2 < \cos x - 1 < 0$
(c) $x - x^3 < \operatorname{sen} x < x$
Aproveite para estimar o erro da aproximação $\operatorname{sen} 0.1 \approx 0.1$.

41. Prove que, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

42. Prove que, se f é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e a equação $f(x) = x^2$ tem três soluções, sendo uma negativa, outra nula e outra positiva, então f' tem pelo menos um zero.

43.* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$ que satisfaz a desigualdade $f(x) \geqslant x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = \alpha$.

44. Mostre que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

45. Mostre que para $x < y$ temos $\mathrm{e}^x(y - x) < \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y(y - x)$.

46. Supondo que f é uma função de classe C^1 em $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|$ para quaisquer $x, y \in [a, b]$.

47. Seja $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que

$$\phi(2n) = -2n \quad \text{e} \quad \phi(2n-1) = 2n - 1\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que a equação $\phi(x) = 0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.
(b) Mostre que a equação $\phi'(x) = 0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

48. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
(a) Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x+2) - f(x)\big) = 0$.
(b) Será que pode garantir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(2x) - f(x)\big) = 0$? Justifique.

49. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.
(a) Prove que, se $\forall_{n\in\mathbb{N}} f(n) = (-1)^n$ então não existe o limite de f' em $+\infty$.
(b) Assuma agora que $\forall_{n\in\mathbb{N}} f(n) = (-1)^n/n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Assumindo a sua existência, calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

50. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e f uma função contínua em $[a, b]$ duas vezes diferenciável em $]a, b[$. Suponha que o gráfico de f e o segmento de recta de extremos $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$ se intersectam num ponto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ com $x_0 \in]a, b[$. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f''(c) = 0$.