9. Continuidade e limites

Cálculo de limites

1.

(a) $0, 1$ (b) $+\infty, 0$ (c) $\mathrm{e}, \mathrm{e}^{-1}$ (d) $\mathrm{e}, \mathrm{e}^{-1}$
(e) $-\infty, 0$ (f) $-\infty, 0$ (g) $-\infty, +\infty$ (h) $0, 0$

2.

(a) $+\infty, 0, 1, 1$ (b) $+\infty, -\infty, 0, 0$ (c) $+\infty, +\infty, 1, 1$

3.

(a) $0, 1, 1$ (b) $0, 1, 1$ (c) $0, 1, -1$

4.

(a) 0, não existe, não existe (b) $1, 0, 0$ (c) não existe, $0, 0$
(d) $0, 1, 1$ (e) $0, +\infty, -\infty$ (f) não existe, $0, 0$

5.

(a) e (b) $-\infty$ (c) 0

6.

(a) $1/3$ (b) 2
(c) 1 (d) 0
(e) 0 (f) $1/2$
(g) $1/2$ (h) 0
(i) $1/2$ (j) 0
(k) 0 (l) -1
(m) $-2/\pi$ (n) $-\sqrt{2}/2$
(o) 1 (p) $2/\pi$

7.

(a) 1 (b) 1 (c) 1
(d) 1 (e) 0 (f) 2
(g) 1 (h) 1 (i) $1/2$
(j) 3 (k) -1 (l) 1
(m) $-\infty$ (n) 1 (o) 1
(p) 1 (q) 1 (r) $\mathrm{e}-1$

8. Sugestão: $u = \operatorname{arcsen} x$.

9.

(a) 1	(b) 2	(c) não existe
(d) $+\infty$	(e) 0	(f) $+\infty$
(g) 1	(h) 1/2	(i) 1
(j) 0	(k) 1	

10. É monótona e limitada.

11.

(a) 1	(b) 0	(c) $+\infty$

12. 1,1/2

13.

(a) 2	(b) 1
(c) 2	(d) 2

Podia calcular (a), (b) e (d)

Funções contínuas

14.

(a) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$	(b) $D = \mathbb{R}\backslash\{-2,-1,0\}$	(c) $D =]0,+\infty[$	(d) $D = [-1,1]$
(e) $D =]-1,1[$	(f) $D = \mathbb{R}\backslash\{k\pi/4 : k \in \mathbb{Z}\}$	(g) $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$	(h) $D = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$
(i) $D = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	(j) $D = [1,+\infty[$		

15. (a) Estritamente crescente.
(b) Majorada, não tem max nem min.
(c) $-1/2$
(d) Sugestão: $\lim y_n = -1$

16. (a) Contínua para $x \neq 0$, contínua à esquerda em $x = 0$.
(b) $D'_f = \mathbb{R}$

17.

(a) Não (b) Sim: $|x|$ (c) Sim. Exercício extra: mostrar que o prolongamento é $\pi/2 - \arctan|x-1|$.

18. (a) $K = \pi/2$
(b)* $-12\pi/25$, $\pi/12$
(c) Contínua para $x \neq -1$, contínua à esquerda em -1.
(d) $D'_f = [-\pi/2, \pi/2]$
(e) Não existe, 0

19. (a) $x < 0$: é a composição de funções contínuas: $\arctan x$ e $1/x$; $x > 0$: é a soma duma constante com a composição de e^x com $x - 1$ que são funções contínuas.
(b) $f(0^+) = 1 + e$, $f(0^-) = -\pi/2$, contínua à direita
(c) Não é monótona. Estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $[0, +\infty[$.
(d) 1, 0
(e) $D'_f =]-\pi/2, 0[\cup]1, 1+e]$

20. (a) $k = 2$
(b) Crescente em $]-\infty,-1]$; decrescente em $[-1,+\infty[$.
(c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
(d) $D'_f =]-\infty, 1]$; sup = max = 1.

21. (a) São contínuas.
(b) φ: sim; ψ: não.
(c) $0 < \varphi(x) \leqslant 1$; Sugestão para ψ: $\forall_\theta\ |\operatorname{sen}\theta| \leqslant |\theta|$.

22. (a) $[0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$
(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $f(1^-)=-\infty$, $f(1^+)=+\infty$
(c) $\mathbb{R}$
(d) Sugestão: $u_n \to 1$ e $v_n \to +\infty$.

23. (a) $D_f = D_g = \mathbb{R}^+$
(b) $f: +\infty$; $g: 0$.
(c) f: não; g: sim.
(d) $\mathbb{R}$

24. (a) -1, $-\infty$
(b) Contínua
(c) Creascente em $]-\infty,0[$; decrescente em $]0,+\infty[$
(d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$
(e) $\max = 0$

25. $D'_G =]0,\pi/2]$

26. $k=2$; $F(1)=1/2$.

27. (a) $-\infty$, 3
(b) $k=-3$
(c) $]-\infty,3[$

28. Sugestão: considere os limites das restrições de f a $\mathbb{Q}$ e a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

29. (a) $D'_f = \{0\} \cup (\mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Q})$
(b) 0, não existe
(c) $x \leqslant 0$

30. $D_f = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. f é contínua em todos os pontos do domínio.

31. $x = \pi/2 + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$

32. $x = \pm\pi/4 + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$

33. Sugestão: tomar $\delta = \varepsilon$ na definição de continuidade.

34.* Sugestão: mostre que existe um $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta \Rightarrow f(0) - 1/2 < f(x) < f(0) + 1/2$.

35.* Sugestão para g: $x^2 - a^2 = (x-a)^2 + 2a(x-a)$.

36. Sugestão: use as propriedades do limite; ou então tome $\varepsilon = 1$ na definição de continuidade.

Teorema de Bolzano

37. $[-1,5] \subset D'_f$; $[-1,2] \cup [4,5] \subset D'_f$.

38.

39. Sugestão: considere a função $f(x) - x$.

40. (a)
(b) 1

41.

(a) Sugestão: $[-\pi,0]$ e $[0,\pi]$
(b) Sugestão: $[-2,-1]$, $[-1,-0{,}1]$ e $[2,3]$
(c) Sugestão: $[1/\mathrm{e}^4,1]$ e $[1,\mathrm{e}]$
(d) Sugestão: $[0,1]$
(e) Sugestão: basta provar que existe um zero pois as funções são periódicas
(f) Sugestão: $[-n-1,-n]$, $n \in \mathbb{N}$.

42. (a) Sugestão: recorde que, se $\lim_{x\to a} f(x) > b$ então $f(x) > b$ numa vizinhança de a.
(b) Sugestão: use a alínea (a).

43. Sugestão: calcule os limites em $\pm\infty$ e imite o exercício 42.

44. Sugestão: comece por calcular os limites de $f(x) - x$.

45. Infinitas soluções. Sugestão: considere os limites laterais de $\sec x - (x^2 - 1)$ em $\pi/2 + k\pi$ e proceda como no exercício 42.

46.* Sugestão: use as propriedades do limite para mostrar que, se $c < b$, então existe um $x \in D_f$ tal que $f(x) > c$ e repita o argumento se $c > a$.

47. $D'_h = [0, \pi/2]$. Sugestão: prolongamento por continuidade; para D'_h mostre primeiro que $D'_g = \mathbb{R}$.

Teorema de Weierstrass

48. Falso

49. (a) Sugestão: calcule D_f.
(b) Não: $g(x) = 1/\sqrt{x}$ por exemplo.

50. Sugestão: aplique o Teorema de Weierstrass à função $|f|$ e note que $\lim |f(x_n)| \geqslant \min |f|$.

51. (a) Sugestão: mostre que o mínimo de f é igual a $\min_{x\in[0,b]} f(x)$.
(b) Sugestão: mostre que o máximo de f é igual a $\max_{x\in[0,a]} f(x)$.
(c) Sugestão: seja $b = \lim f$; comece por mostrar que existe um $\delta > 0$ tal que $b-1 < f(x) < b+1$ em $]1/\delta, +\infty[$; para terminar, use o teorema de Weierstrass.

52. Sugestão: mostre que $f(x) < f(0)$ numa vizinhança de $+\infty$ e proceda como no exercício 51(b).

53. (a) Sugestão: se $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ então $f(x) > 0$ numa vizinhança de a.
(b) Sugestão: proceda como no exercício 52.

54. Sugestão: proceda como no exercício 52.

55.

56. (a) Sugestão: ver exercício 51(c).
(b) $\max g = 1$