Continuidade e limites

Cálculo de limites

1. Calcule os limites quando $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ das seguintes funções:

(a) $e^{-1/\sqrt{x}}$ (b) $e^{(1-x)/\sqrt{x}}$ (c) $\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ (d) $\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$

(e) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ (f) $\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ (g) $\ln\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ (h) $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\right)$

2. Calcule os limites quando $x \to 0^+$, $x \to 0^-$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das seguintes funções:

(a) $e^{1/x}$ (b) $\operatorname{senh}(1/x)$ (c) $\cosh(1/x)$

3. Calcule os limites quando $x \to 0$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das seguintes funções:

(a) $\cos\left(\dfrac{x-\pi}{x^2+2}\right)$ (b) $\tan\left(\dfrac{\pi x}{4x-1}\right)$ (c) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$

4. Calcule, ou justifique que não existem, os limites quando $x \to 0$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das seguintes funções:

(a) $\operatorname{sen} x$ (b) $(\operatorname{sen} x)/x$ (c) $\operatorname{sen}(1/x)$

(d) $x \operatorname{sen}(1/x)$ (e) $x\cos(1/x)$ (f) $x\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$

5. Calcule ou mostre que não existe

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \exp\left(\frac{x^2-3x+2}{x-2}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \tan\left(\frac{\pi x}{\sqrt{4x^2+3}}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\big(x\operatorname{sen}(\ln x)\big)$

6. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{3x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{\ln x}{x-1} - 1\right)\left(1 + \operatorname{sen}\frac{1}{x-1}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \big(\ln(\operatorname{sen} x) - \ln x\big)$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{x^2+2x-3}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\operatorname{sen} x}{x^2+2x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)\ \operatorname{sen}^2(1/x)}{x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x + x}$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \ln x}{x-1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{2\pi \ln x}{x-1} - \pi\right)$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)\ \ln(x)}{(x-1)\operatorname{arcsen}(x^2)}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\operatorname{sen}(x)}{x^2-x}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\cos^3 x}{e^x \operatorname{sen} x}$ (p) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\ln(1+x)(e^x-1)}{x^3 \arccos x}$

7. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1}$ (c) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{\operatorname{sen} x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\big(x^{-1}\operatorname{sen}(x)\big)}{x^{-1}\operatorname{sen}(x) - 1}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1}$

(g) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\tan t)}{\operatorname{sen}(t)}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x \operatorname{sen} x}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\tan(2x)}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} + e^x - 2}{e^x - 1}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 3\cos x + 2}{\ln(\cos x)}$ (l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{\ln x}$

(m) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4 \operatorname{sen}(1/x)$ (n) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 \ln\big(1 + (1/x^2)\big)$ (o) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\big(e^{1/x} - 1\big)$

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x \operatorname{sen}\big(e^{-x}\big)$ (q) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\ln(x+3)}{x+2}$ (r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{(\operatorname{sen} x)/x} - 1}{(\operatorname{sen} x)/x}$

8. Calcule o limite quando $x \to 0$ da função $x/\operatorname{arcsen}(x)$.

9. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(2x+1)}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1) + \ln x}{x - 1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(1/\sqrt{x}\,)$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{3/2} \operatorname{sen}(1/x)$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{(x-1)^5} - 1}{(x-1)^7}$

(g) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{cotan} x)}{\cos x}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2\sqrt{x}}{2x}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x)}{x \arccos x}$

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\arctan x}{x}$ (k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1 + \arccos x)}{\arccos x}$

10. Mostre que se (u_n) é uma sucessão monótona, $(\arctan u_n)$ é uma sucessão convergente.

11. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim x_n = 1$ e $x_n > 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Calcule, se existir, $\lim f(x_n)$ nos casos seguintes:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (b) $f(x) = \ln x$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

12. Suponha que para todo o $n \in \mathbb{N}$ a função f verifica a condição

$$f(-1/n) = 1 - f(1/n)\,.$$

Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$ quanto valerá a sua soma? Se existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ qual será o seu valor?

13. Sabendo que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ e que $f(x) \neq 2$ para todo o x, calcule justificando:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}\big(f(x) - 2\big)}{f(x) - 2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} f\big(f(x) - 1\big)$ (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)\ln\big(f(x) - 1\big)}{f(x) - 2}$

Quais destes limites poderia ainda calcular se não assumisse que $f(x) \neq 2$ para todo o x?

Funções contínuas

14. Determine o domínio das seguintes funções e justifique que elas são contínuas no seu domínio.

(a) $\dfrac{x+1}{x^3+x}$ (b) $\dfrac{x+1}{x^4+3x^3+2x^2}$ (c) $\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2+x}$ (d) $\operatorname{sen}\bigl(\cos\sqrt{1-x^2}\,\bigr)$

(e) $\cos\Bigl(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Bigr)$ (f) $\sqrt[3]{\tan(2x)-\operatorname{cotan}(2x)}$ (g) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ (h) $\dfrac{|x^2-1|}{x^2-1}$

(i) $\sqrt{-\operatorname{sen}^2}$ (j) $\sqrt{\ln x}$

15. Considere a função $f\colon\ ]{-1},1[\ \to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1-\dfrac{3}{x+1}$ $\quad(-1<x<1)$

(a) Estude a monotonia de f.
(b) Indique se f é majorada ou minorada e se tem máximo ou mínimo em $]{-1},1[$.
(c) Se x_n for uma sucessão de termos em $]{-1},1[$ convergente para 1 qual será o limite de $f(x_n)$? Justifique.
(d) Dê um exemplo duma sucessão y_n de termos em $]{-1},1[$ tal que a sucessão $f(y_n)$ não seja limitada.

16. Considere a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ \ln x & 0<x<1\\ \operatorname{sen}(\pi x) & x\geqslant 1\end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade.
(b) Esboce o gráfico de f e determine o seu contradomínio.

17. Quais das seguintes funções são prolongáveis por continuidade a $\mathbb{R}$?

(a) $f(x)=|x|/x$ (b) $f(x)=\mathrm{e}^{\ln(x^2)/2}$ (c) $\arctan\bigl(1/|x-1|\bigr)$

18. Considere a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\leqslant -1\\ \operatorname{arcsen} x & \text{se } -1<x<1\\ K\operatorname{sen}(\pi x/2) & \text{se } x\geqslant 1\end{cases}$$

(a) Sabendo que f é contínua em $x=1$, determine o valor de K.
(b)* Determine $f\bigl(\frac{4}{\pi}\arccos(-\frac{4}{5})\bigr)$ e $f\bigl(\cos(\frac{5\pi}{12})\bigr)$.
(c) Estude a continuidade de f.
(d) Indique qual o contradomínio de f e, se exitirem, $\sup f$, $\max f$, $\inf f$ e $\min f$.
(e) Calcule, caso existam, os limites de f em $+\infty$ e $-\infty$.

19. Considere a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases}\arctan(1/x) & \text{se } x<0\\ 1+\mathrm{e}^{1-x} & \text{se } x\geqslant 0\end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
(b) Calcule os limites laterais de f no ponto 0 e indique se f é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto.
(c) Estude a monotonia de f (sem usar derivadas).
(d) Calcule os limites de f em $+\infty$ e $-\infty$.
(e) Indique qual o contradomínio de f e, se exitirem, $\sup f$, $\max f$, $\inf f$ e $\min f$.

20. Considere a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases}\ln\bigl(k/(2+x^2)\bigr) & \text{se } x>0\\ -x(x+2) & \text{se } x\leqslant 0\end{cases}$

(a) Sabendo que f é contínua em $x=0$, determine o valor da constante k.
(b) Estude a monotonia de f (sem usar derivadas).
(c) Calcule os limites de f em $+\infty$ e $-\infty$.
(d) Indique qual o contradomínio de f e, se exitirem, $\sup f$, $\max f$, $\inf f$ e $\min f$.

21. Considere as funções

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}\,, \quad \psi(x) = x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$$

(a) Estude quanto à continuidade as funções φ ψ em cada ponto do seu domínio.
(b) Indique se cada uma das funções é ou não prolongável por continuidade ao ponto 0.
(c) Mostre que φ e ψ são funções limitadas.

22. Considere a função f definida por $f(x) = \sqrt{x}/(x-1)$.
(a) Indique, sob a forma duma união de intervalos, o domínio D_f de f.
(b) Calcule os limites laterais de f no ponto 1 e o limite de f em $+\infty$.
(c) Indique o contradomínio de f.
(d) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n) de termos em D_f tais que (u_n) e $\big(f(v_n)\big)$ são convergentes e (v_n) e $\big(f(u_n)\big)$ são divergentes.

23. Considere as funções

$$f(x) = \ln\big(\ln(1+x)\big)\,, \quad g(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen}(1/x^2)$$

(a) Determine o domínio de f e de g e estude as funções quanto à continuidade.
(b) Calcule os limites de f e g em $+\infty$.
(c) Indique se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.
(d) Indique o contradomínio de f.

24. Seja $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{1/x} & \text{se } x < 0; \\ \ln \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
(b) Estude a continuidade de f.
(c) Determine (sem usar derivadas) os intervalos de monotonia de f.
(d) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.
(e) Sendo g o prolongamento por continuidade de f ao ponto 0, mostre que g tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$ e calcule o máximo de g nesse intervalo.

25. Considere a função $g(x) = \arctan\big(1/|x+1|\big)$. Verifique que g é prolongável por continuidade ao ponto -1. Sendo $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento, determine o contradomínio de G.

26. Considere a função $f\colon \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\big((x-1)^2\big)}{k(x-1)^2} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

em que $k \in \mathbb{R}$. Determine k por forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 1. Sendo $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento, determine $F(1)$.

27. Considere a função $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3\cos\Big(\frac{\pi}{1+x^2}\Big) & \text{se } x > 0 \\ (k-x)(x+1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.
(a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
(b) Determine a constante k tal que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.
(c) Sendo $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento, determine o contradomínio de F.

28. Estude a continuidade da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$.

29. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \tfrac{1}{2}\big(x + |x|\big)d(x)$$
onde $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet.
(a) Indique o contradomínio de f. A função é majorada? E minorada?
(b) Estude $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
(c) Em que pontos é f contínua?

30. Considere a função $f(x) = \sqrt{-d(x)}$ onde $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet. Determine o domínio de f e diga em que pontos é f contínua.

31. Sendo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 1, em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$?

32. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 0. Em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\tan x - \operatorname{cotan} x)$?

33. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua.

34.* Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) \in \mathbb{Z}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se f for contínua em $x = 0$ então existe uma vizinhança de zero na qual f é constante.

35.* Mostre, recorrendo à definição de continuidade, que as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 4x - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$ são contínuas para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

36. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = 1$. Mostre que existe uma vizinhança de zero na qual $f > 0$.

Teorema de Bolzano

37. Na tabela seguinte estão indicados alguns dos valores duma função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	-1	5	4

O que pode concluir sobre o contradomínio de f? E se f estivesse definida em $\mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}\}$?

38. Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]0, \pi[$.

39. Seja f uma função contínua em $[0, 1]$ tal que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo o $x \in [0, 1]$. Prove que existe um ponto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

40. Seja $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ para todo o x e $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{4}$.
(a) A equação $f(x) - x = 1$ tem solução em $[-1, 1]$? Justifique.
(b) Determine, justificando, o limite da sucessão $v_n = \tan\big(f(u_n)\big)$ em que $u_n = (1 - n)/n$.

41. Esboce os gráficos das funções f e g e use o Teorema de Bolzano em intervalos $[a, b]$ apropriados para mostrar que a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos n soluções:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x^2 - 1, n = 2$
(b) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 1/x$, $n = 3$
(c) $f(x) = \mathrm{e}^x - 3$, $g(x) = \ln x$, $n = 2$
(d) $f(x) = \arccos x$, $g(x) = \tan x$, $n = 1$
(e) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \frac{1}{2} + \cos x$, $n = +\infty$
(f) $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = -\cos(\pi x)$, $n = +\infty$

42. Seja $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(1^-) = +\infty$ e $f(0) < 0$.
(a) Mostre que existe um $c \in [0, 1[$ tal que $f(c) > 0$.
(b) Prove que f tem um zero no intervalo $]0, 1[$.

43. Use o Teorema de Bolzano para mostrar que qualquer função polinomial de grau ímpar tem pelo menos um zero.

44. Seja $f\colon]-1, 1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(-1^+) = -\infty$ e $f(1^-) = +\infty$. Prove que existe um ponto $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = c$.

45. Esboce os gráficos das funções $\sec x$ e e $g(x) = x^2 - 1$. Quantas soluções tem a equação $\sec x = x^2 - 1$? Prove que assim é usando o Teorema de Bolzano.

46.* Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $]a, b[$.

47. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $g\colon\ ]a, b[$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b} g(x) = +\infty$$

Mostre que existe uma e uma só função contínua $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \arctan\big(g(x)^2\big)$ para todo o $x \in\ ]a, b[$ e determine o contradomínio de h.

Teorema de Weierstrass

48. Verdadeiro ou falso: existe uma função contínua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma sucessão (x_n) tais que $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ e $f(x_n) = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

49. Seja $g\colon [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ uma função contínua.
  (a) Mostre que a função $f(x) = g(1 - x^2)$ tem máximo e mínimo.
  (b) Se o domínio de g fosse $]0, +\infty[$, poderíamos continuar a garantir a existência de máximo e mínimo de f?

50. Seja $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja (x_n) uma sucessão em $[0, 1]$ tal que $\lim f(x_n) = 0$. Mostre que f tem pelo menos um zero.

51. Seja $f\colon [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que:
  (a) se existe $b > 0$ tal que $f(b) < f(x)$ para todo o $x > b$ então f tem mínimo.
  (b) se existe $a > 0$ tal que $f(0) > f(x)$ para todo o $x > a$ então f tem máximo.
  (c) Se existe, em $\mathbb{R}$, o limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ então f é limitada.

52. Seja $f\colon [0, +\infty[$ uma função contínua tal que $f(0) > 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Prove que f tem máximo.

53. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ com limites positivos em $\pm\infty$ e tal que $f(0) < 0$. Mostre que:
  (a) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções.
  (b) A função f tem mínimo em $\mathbb{R}$.

54. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

prove que f tem máximo e que o seu contradomínio é da forma $]0, f(c)]$ para algum $c \in \mathbb{R}$.

55. Seja $f\colon\ ]-1, 1[\ \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty = \lim_{x\to1^-} f(x)\,.$$

Prove que o contradomínio de f é da forma $]-\infty, f(c)]$ para algum $c \in\ ]-1, 1[$.

56. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existem e são finitos os limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
  (a) Mostre que f é limitada.
  (b) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique justificando qual o máximo da função $g(x) = 1/\big(1 + f(x)^2\big)$.