I. Funções

1. Indique se são limitadas/majoradas/minoradas, monótonas, pares/ímpares, e determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo das seguintes funções:

(a) $\dfrac{1}{x}$ (b) $\dfrac{1}{x}$ em $]0,+\infty[$ (c) $\dfrac{1}{1+|x|}$

(d) 2^{-x} em $]0,+\infty[$ (e) a^x $(a>0)$ (f) $\sqrt[3]{x}$

(g) $f(x)=-x^{-1/4}$ (h) $f(x)=(x+1)^2+\ln x$ (i) $f(x)=\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$

2. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & x<-1\\ x/2 & |x|\leqslant 1\\ \mathrm{e}^x & x>1\end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de f.
(b) Qual o contradomínio de f? Esboce o gráfico da função inversa f^{-1}.
(c) Calcule explicitamente f^{-1}.

3. Considere a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-\operatorname{sen}^2 x & x<0\\ \arccos(-\sqrt{x}\,) & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \arctan(1/x) & 1<x\leqslant\sqrt{3}\\ x^2 & x>\sqrt{3}\end{cases}$$

(a) Estude a monotonia de f nos intervalos $[0,1]$, $\big]1,\sqrt{3}\big]$ e $\big]\sqrt{3},+\infty\big[$ (sem usar derivadas) e determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo em cada intervalo.
(b) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de f em todo o seu domínio (se existirem). Qual o contradomínio de f?
(c) Decida justificando se f é injectiva em $\mathbb{R}^+$.
(d) Verifique que f é injectiva em $\big[-\pi/2,\sqrt{3}\big]$ e determine a inversa da restrição de f a esse intervalo.

4. Use uma substituição $u=g(x)$ para simplificar a seguinte equação e resolva-a:

(a) $\mathrm{e}^{2x}+e^x=6$ (b) $2\sqrt{x+1}+x-2=0$

5. Considere as funções

$$f(x)=\sqrt{x},\quad g(x)=\sqrt[3]{x},\quad p(x)=x^2,\quad q(x)=2x+1$$

Escreva cada uma das seguintes funções como composição de f, g, p e q.

(a) $\sqrt[3]{x^2}$ (b) $\sqrt{2x+1}$ (c) $\sqrt[6]{x}$

(d) $2x^2+1$ (e) $\sqrt[4]{x}$ (f) $2\sqrt[3]{x}+1$

(g) $\sqrt{2\sqrt{x}+1}$ (h) $|x|$ (i) $\big(2\sqrt[3]{x}+1\big)^2$

6. Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $\arctan(\ln x)$ (b) $\ln(\ln x)$ (c) $\ln\left(\frac{\pi}{4} - \arctan x\right)$

(d) $\tan x + \operatorname{cotan} x$ (e) $\ln(1 - x^{3/2})$ (f) $\sqrt[4]{1 + \sqrt{x+1}}$

(g) $\operatorname{arcsen}(x/2)$ (h) $\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ (i) $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{1 - x^2}$

(j) $\sqrt{\operatorname{sen}(x) - 1}$ (k) $\operatorname{arcsen}(\mathrm{e}^x)$ (l) $\arccos(1/x)$

(m) $\arccos\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$ (n) $\ln\left(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (o) $\sqrt{\dfrac{x^4 - x^2}{x^2 + 1}}$

(p) $\arctan\left(\dfrac{1}{1 - x^2}\right)$ (q) $\ln\left(1 - \operatorname{arcsen} x\right)$ (r) $\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

(s) $\ln(1 - \arccos x)$ (t) $\operatorname{arcsen}(1 - \ln x)$

7. Determine os pontos isolados e de acumulação dos domínios das funções do exercício anterior.

8. Determine as funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios e contradomínios:

(a) $D_f =]0, +\infty[\,, \quad f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2}$ (b) $D_f =]-\infty, 0]\,, \quad f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2}$

(c) $D_f =]0, \pi/2[\,, \quad f(x) = \cos(2x)$ (d) $D_f = \left]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right[\,, \quad f(x) = \tan(x - 1)$

(e) $D_f =]-\pi/2, \pi/2[\,, \quad f(x) = 2 \operatorname{sen} x$ (f) $D_f = [\pi/2, 3\pi/2], \quad f(x) = 2 \operatorname{sen} x$

9. Calcule, ilustrando o resultado no círculo trigonométrico:

(a) $\operatorname{sen}(7\pi/3)$ (b) $\cos(13\pi/4)$ (c) $\tan(5\pi/6)$

(d) $\arccos 0$ (e) $\arccos 1$ (f) $\arccos(-\frac{1}{2})$

(g) $\operatorname{arcsen}(-1/2)$ (h) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{3}/2)$ (i) $\arccos(-\sqrt{3}/2)$

(j) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{2}/2)$ (k) $\arctan 1$ (l) $\arctan(-\sqrt{3}\,)$

(m) $\operatorname{arcsen}(1/2)$ (n) $\arctan \sqrt{3}$ (o) $\arctan(-\sqrt{3}/3)$

(p) $\arctan\left(\tan(3\pi/4)\right)$ (q) $\arccos\left(\cos(5\pi/3)\right)$ (r) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}(-2\pi/3)\right)$

(s) $\arctan\left(\tan(-2\pi/3)\right)$ (t) $\arccos\left(\cos(-\pi/6)\right)$ (u) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}(5\pi/6)\right)$

(v) $\arctan\left(\tan(5\pi/6)\right)$ (w) $\arccos\left(\cos(-7\pi/4)\right)$ (x) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}(3\pi/4)\right)$

(y) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}(2\pi/3)\right)$ (z) $\arctan\left(\tan(3\pi/4)\right)$

10. Deduza as seguintes identidades:

(a) $\cos(\arccos x) = x$ (b) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$

(c) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ (d) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

(e) $\tan(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \neq \pm 1)$ (f) $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \quad (x \neq 0)$

11. Resolva as seguintes equações:

(a) $\arccos(3x + 1) = 2\pi/3$ (b) $1 - \frac{2}{\pi} \arctan(x^2 - 1) = \frac{1}{2}$

(c) $\dfrac{\pi}{\operatorname{arcsen}(x^2 + \frac{1}{4})} = 6$ (d) $\mathrm{e}^{2x} + e^x \geqslant 6$

(e) $2 - \dfrac{3}{\pi} \arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) < 1$ (f) $\mathrm{e}^{x^3} < 1$

(g) $\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-x} \leqslant -1$ (h) $\ln(1/x) \geqslant 0$

(i) $\ln(x^2 - 3) \geqslant 0$ (j) $1/\ln x \geqslant 1$

(k) $\arctan(x + \sqrt{3}) \leqslant \pi/3$ (l) $2 \arccos(x^2 - 4) \geqslant \pi$

12. Reescreva as seguintes funções sem usar módulos, definindo-as por ramos se necessário (pode ajudar esboçar os gráficos):

(a) $|x^3 - \sqrt{x}|$ (b) $|x\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}|$ (c) $|2^x - 3^x|$ (d) $|(1/4)^x - (1/5)^x|$

(e) $\left|\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right|$ (f) $\left|\dfrac{1}{x^5} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right|$ (g) $\left|\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right|$ (h) $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right|$

13. Escreva sem usar módulos. Justifique.

(a) $|\ln 2 - 1|$ (b) $|\operatorname{arcsen} 0{,}8 - 2|$ (c) $|\arccos 0{,}6 - 2|$

(d) $|\arctan 10 - 2|$ (e) $|\tan 0{,}2 - 0{,}2|$ (f) $|\arctan 0{,}8 - 1|$

14. Esboce, na mesma região, os gráficos de f e de g:

(a) $f(x) = x^2 \quad g(x) = x^4$ (b) $f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = \sqrt[4]{x}$ (c) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$ (e) $f(x) = 1/x \quad g(x) = 1/x^2$ (f) $f(x) = 1/x \quad g(x) = 1/\sqrt{x}$

(g) $f(x) = 2^x \quad g(x) = 3^x$ (h) $f(x) = 2^{-x} \quad g(x) = 3^{-x}$ (i) $f(x) = (1/2)^x \quad g(x) = (1/3)^x$

(j) $f(x) = x^2 \quad g(x) = \sqrt{x}$ (k) $f(x) = \mathrm{e}^x \quad g(x) = \ln x$ (l) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad g(x) = \cos x$

(m) $f(x) = x^3 \quad g(x) = x^5$ (n) $f(x) = x^3 \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$ (o) $f(x) = \cos x \quad g(x) = \sec x$

15. Esboce os gráficos de arcsen, arccos, arctan a partir dos gráficos de sen, cos e tan.

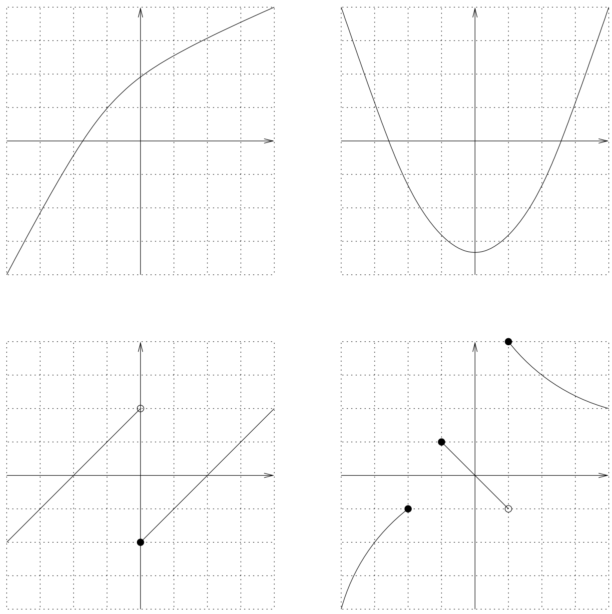
16. Esboce as regiões do plano limitadas pelas seguintes curvas:

(a) $y = \pi + 2\arctan x$, $y = -2\arctan x$, $x = 0$

(b) $y = \ln(2 - x)$, $y = \ln(x + 1)$, $y = 0$

17. Esboce o gráfico duma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com contradomínio $[0, 1] \cup [2, 3]$.

18. Quais dos seguintes gráficos representam funções injectivas? Nesses casos esboce os gráficos das funções inversas.



19. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma seguinte:

$$\operatorname{senh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

(a) Deduza as igualdades seguintes. Em que diferem das correspondentes igualdades para o seno e o coseno?

(i) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

(ii) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(y)\cosh(x)$

(iii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$

(iv) $\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$

(v) $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$

(b) Verifique que a função senh é ímpar e a função cosh é par.

(c) Mostre que $\operatorname{senh}(x)$ é crescente.

(d) As funções inversas de senh e da restrição de cosh a $[0, +\infty[$ designam-se respectivamente por $\operatorname{argsenh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{argcosh}\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$. Deduza:

$$\operatorname{argsenh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\,\bigr) \qquad \operatorname{argcosh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\,\bigr)$$

20. Dê um exemplo duma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ímpar, crescente em $[0, 1]$ e com contradomínio $[-2, -1[\cup \{0\} \cup]1, 2]$.

21. Existe alguma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente cujo contradomínio seja $]0, 1]$? Justifique.

22. Seja $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função injectiva e seja $g\colon f(D) \to \mathbb{R}$ a sua inversa (ou seja, para quaisquer $x \in D$ e $y \in f(D)$ temos $y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = x$). Mostre que:

(a) Se f é crescente (resp. decrescente) então g é crescente (resp. decrescente).

(b) Se f é ímpar, então g é ímpar.

(c) As funções arcsen e arctan são crescentes e ímpares e arccos é decrescente.

II. Limites de funções

1. Esboce o gráfico duma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ consistente com a tabela seguinte (em que $\star$ indica que o limite lateral não existe em $\overline{\mathbb{R}}$):

x	$f(x^-)$	$f(x)$	$f(x^+)$
0	1	1	$+\infty$
1	$\star$	0	1

2. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{\cos x}{x} - \frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}\Big)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\big(\ln x + \cos(1/x)\big)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\big(\cos x + \cos(1/x)\big)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\big(1-\cos(1/x)\big)$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\operatorname{sen}(1/x)$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

3. Calcule os limites laterais da função $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ nos pontos indicados e decida se existe ou não o limite de f nesse ponto.

(a) $a = -3$ (b) $a = 2$

4. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$

5. Calcule os limites laterais na origem da função $\sqrt{x^2}/x$.

6. Decida se a sucessão (x_n) definida por

$$x_n = \frac{\sqrt[4]{4n^4+1}}{n+2}\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{4}\Big)$$

é ou não convergente e em caso afirmativo calcule o seu limite.

7. Baseando-se directamente na definição de limite mostre que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(5x-7) = 3$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{1/x} = 0$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{1/x} = +\infty$

(d) $\displaystyle\lim_{\theta\to(\pi/2)^-}\tan\theta = +\infty$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x} = +\infty$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\mathrm{e}^{-x} = 0$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\sqrt[3]{x} = -\infty$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\big(1 - x\operatorname{sen}(1/x)\big) = 1$

8. Calcule ou mostre que não existe, os limites $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} f(x)$ em que

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \\ 2^x & \text{se } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

9.* Seja $f\colon \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$. Mostre que $\sup f = +\infty$.

10. Dada uma função $f\colon D \to \mathbb{R}$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$ de acumulação de D:

(a)* Mostre que se f tem uma assímptota vertical em a então f é ilimitada em qualquer vizinhança de a.

(b) Dê um exemplo duma função f ilimitada em qualquer vizinhança de a mas sem assímptota vertical em a.

11.* Seja $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente tal que $f(a^-) = +\infty$. Mostre que $D \subset \,]-\infty, a[$.

12.* Seja $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Mostre que f não é crescente.

13.* Mostre que se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica não constante então não existem $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.