Limites de sucessões

Módulo, vizinhanças

1.

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{3}$

(c) 40 (d) $\dfrac{7}{3}$

2.

(a) $V_3(3)$ (b) $V_3(2)$ (c) $V_3(-2)$

(d) $V_{5/4}(\frac{3}{4})$ (e) $V_1(\frac{2}{3})$

3. $x < 2$

Limites de sucessões

4.

(a) $\frac{2}{3}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 8

(e) 8 (f) $+\infty$ (g) 1 (h) 0

(i) 0 (j) 0 (k) 0 (l) $\frac{1}{2}$

(m) 2 (n) $\sqrt{2}/2$ (o) 1 (p) 3

(q) 0 (r) $\frac{2}{3}$ (s) 1 (t) 0

(u) $\frac{1}{2}$ (v) $+\infty$ (w) $\frac{1}{2}$ (x) $\frac{1}{4}$

(y) 0 (z) 0

5.

(a) 0 (b) $+\infty$

6.

(a) 2 (b) 0 (c) 0 (d) $+\infty$ (e) 0

7. Limitadas: u_n e w_n. Convergente: u_n.

8. $\lim u_n = 1$, v_n diverge, $\lim w_n = 1$ se $-1 < a \leqslant 1$, $\lim w_n = 0$ se $|a| > 1$, w_n diverge se $a = -1$.

9.

(a) 0 (b) 0 (c) diverge

(d) diverge (e) 2 (f) diverge

(g) diverge (h) 0 (i) diverge

10. Sugestão: mostre que $\lim u_n \in [0,1]$ e $\lim u_{2n+1} \in \mathbb{R}\setminus]0,1[$

11. Sugestão: considere o limite de $(-1)^n u_n + u_n/(n+1)$ para n par e para n ímpar.

12. Convergente: $-4 < a \leqslant 4$. Divergente mas limitada: $a = -4$.

13. (a) Sugestão: assuma que $x_n + y_n$ convergia e note que $y_n = (x_n + y_n) - x_n$.
(b)
(c) $y_n = -x_n$
(d) Sugestão: pode tomar $x_n = 1/n$.

Definição de limite

14. (a) F
(b) F
(c) V
(d) F

15. (a) $n > (1/\varepsilon^2) - 1$, $n \in \mathbb{N}$
(b) $p = (1/\varepsilon^2) - 1$

16.

(a) $n > (2/\varepsilon) - 1$; Sim.

(b) $\begin{cases} n < \varepsilon/(2-\varepsilon), & \text{se } \varepsilon < 2, \\ n \in \mathbb{N}, & \text{se } \varepsilon \geqslant 2; \end{cases}$ Não.

(c) $\begin{cases} (2/\varepsilon) - 1 < n \leqslant 1000, & \text{se } \varepsilon \leqslant 1, \\ n > (2/\varepsilon) - 1, & \text{se } \varepsilon > 1; \end{cases}$ Não.

17.

(a) $p = \sqrt{(1/\varepsilon) - 1}$ (b) $p = (3/\varepsilon) - 1$ (c) $p = \big(1 + (1/\varepsilon)\big)^2$ (d) $p = 1/\sqrt{1 - (1-\varepsilon)^2}$

18.

(a) $p = (1/\varepsilon^3) + 1$ (b) $p = \sqrt{1/(\varepsilon^4) - 4}$ $(\varepsilon \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2})$ (c) $p = 1/\varepsilon + \sqrt{(1/\varepsilon^2) - 4}$ $(\varepsilon \leqslant \frac{1}{2})$

19. Sugestão: $n! \geqslant n$.

20. (a) 6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
(b) Não. Dado p podemos escolher n tal que $n > p$ e $n > 16$. Então $|x_n - 2| \geqslant 1$ logo $x_n \nrightarrow 2$.

21.

(a) Sugestão: tomar, por exemplo, $\varepsilon = 1$ e resolver $1/n > 1/\varepsilon$.

(b) Sugestão: tomar, por exemplo, $\varepsilon = 1$ e resolver $|n^2 - 100| < \varepsilon$.

(c) Sugestão: tomar $\varepsilon < 0{,}1$; por exemplo, $\varepsilon = 0{,}05$.

(d) Sugestão: tomar por exemplo $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

(e) Sugestão: tomar $\varepsilon \leqslant 2$ e dado p tomar n par e $n > p$.

22. (a)
(b) Sugestão: por hipótese, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 1$.
(c)
(d)* Sugestão: comece por mostrar que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2$.

23.* Sugestão: se $\lim a_n = \ell - \varepsilon/2$ então $a_n > \ell - \varepsilon$ para n suficientemente grande.

24. Sugestão para (a) e (b): $u_n > 1/\varepsilon \Leftrightarrow 0 < 1/u_n < \varepsilon$. A última afirmação é falsa.