Limites de sucessões

Módulo, vizinhanças

1. Indique o maior $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto A contém uma vizinhança-ε do ponto x_0:

(a) $A = [0,1],\ x_0 = \frac{1}{2}$; (b) $A = [0,1],\ x_0 = \frac{1}{3}$;

(c) $A = [-20, +\infty[\,,\ x_0 = 20$; (d) $A = [-2,3] \cup]4, +\infty[\,,\ x_0 = \frac{2}{3}$.

2. Escreva em forma de vizinhança:

(a) $|x-3| < 3$ (b) $|2-x| < 3$ (c) $|2x+4| < 6$

(d) $|4x-3| < 5$ (e) $|3x-2|^3 < 27$

3. Resolva a equação $|x-1| < |x-3|$ pelos seguintes métodos:

(a) Esboçando os gráficos de $|x-1|$ e de $|x-3|$.
(b) Interpretando $|x-1|$ e $|x-3|$ como a distância respectivamente de x a 1 e de x a 3.
(c) Usando a definição de módulo: considere separadamente os três casos $x \leqslant 1$, $1 < x < 3$ e $x \geqslant 3$.
(d) Usando as equivalências $\big(|a| < b \Leftrightarrow a < b \wedge a > -b\big)$ e $\big(|a| > b \Leftrightarrow a > b \vee a < -b\big)$.
(e) Elevando ambos os membros ao quadrado.

Limites de sucessões

4. Calcule o limite das seguintes sucessões:

(a) $\dfrac{2n+3}{3n-1}$ (b) $\dfrac{n^2-1}{n^4+3}$ (c) $\dfrac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$ (d) $\dfrac{(2n+1)^3+n}{n^3+1}$

(e) $\dfrac{(2n+1)^3+n^2}{(n+1)^2(n+2)}$ (f) $\dfrac{1+n^3}{n^2+2n-1}$ (g) $\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}$ (h) $\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/6)}{2n}$

(i) $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ (j) $\dfrac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (k) $\dfrac{\operatorname{sen}\big(n!\big)}{(2n)!}$ (l) $\dfrac{n+\cos n}{2n-1}$

(m) $\dfrac{(n+1)^2+2n^4}{(n+1)^4+2n^2}$ (n) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{4n^2+1}}$ (o) $\dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+1}}$ (p) $\dfrac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}$

(q) $\dfrac{4^n}{1+4^{n^2}}$ (r) $\dfrac{2n^2+(-1)^n}{3n^2-1}$ (s) $\dfrac{n^n}{n^n+1}$ (t) $\dfrac{(a^n)^2}{a^{n^2}}$ $(a>1)$

(u) $\dfrac{\sqrt{n^2+3n-2}}{2n+5}$ (v) $\dfrac{(n+2)\sqrt{n^3+5}}{n\sqrt[3]{n+1}+5^{-n}}$ (w) $\dfrac{1+2^{-n}+3^{-n}}{2+3^{-n}+4^{-n}}$ (x) $\dfrac{n^2+\operatorname{sen}(n^2)}{(2n+1)^2}$

(y) $\dfrac{(-2)^n}{1+3^n}$ (z) $\dfrac{n+1}{n!}$

5. Determine, se existirem, os limites das sucessões que têm por termo de ordem n:

(a) $\dfrac{n^{1/2}+n}{n^{1/3}+(n^2+1)^{5/2}}$ (b) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-n}9^{n/2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-n}+9^{n/2}}$

6. Calcule o limite das seguintes sucessões:

(a) $\dfrac{1}{n}(2n+\sqrt{n})$ (b) $\dfrac{1}{n}\Big(2+\dfrac{1}{n}\Big)$ (c) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (d) $n^{n+1}-n^n$ (e) $n-\dfrac{n^3+1}{n^2+1}$

7. Das sucessões de termos gerais

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n}\,,\quad v_n=\frac{n^{n+1}}{n^n+1}\,,\quad w_n=u_nv_n$$

indique, justificando, quais as que são limitadas e as que são convergentes.

8. Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais

$$u_n=\cos(n!\pi)\,,\quad v_n=\frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}\,,\quad w_n=\frac{1+a^n}{1+a^{2n}}\ (a\in\mathbb{R})$$

9. Calcule o limite (em $\mathbb{R}$) ou justifique a sua não existência para cada uma das sucessões de termo geral

(a) $\dfrac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\dfrac{1}{(-1)^n n^2+2}$ (c) $\big(1+(-1)^n\big)\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)$

(d) $\dfrac{n\big(1+(-1)^n\big)}{2}$ (e) $\dfrac{2n^2+(-1)^n}{n^2-1}$ (f) $\dfrac{n^2\cos(n\pi)}{2n^2+n+1}$

(g) $\dfrac{(-1)^n}{n^{1+(-1)^n}}$ (h) $\dfrac{\sqrt[3]{(-1)^n n^2+2}}{n+3}$ (i) $\dfrac{(-1)^n n^3+1}{n^2+2}$

10. Mostre que se (u_n) é uma sucessão convergente tal que $u_{2n}\in\,]0,1[$ e $u_{2n+1}\in\mathbb{R}\setminus]0,1[$ então $\lim u_n\in\{0,1\}$.

11. Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1=a\,,\quad u_{n+1}=(-1)^n u_n+\frac{u_n}{n+1}$$

com $a\in\mathbb{R}$. Mostre que se (u_n) é convergente então $\lim u_n=0$.

12. Diga para que valores de a a sucessão de termo geral $x^n=a^n/2^{1+2n}$ é convergente, e para que valores é divergente mas limitada.

13. Dadas sucessões (x_n) e (y_n)

(a) Mostre que se (x_n) converge e (y_n) diverge então (x_n+y_n) diverge.
(b) Mostre que se (x_n) converge com limite não nulo e (y_n) diverge então (x_ny_n) diverge.
(c) Mostre através de exemplos que, se (x_n) e (y_n) divergem, as sucessões (x_n+y_n) e (x_ny_n) podem divergir ou convergir.
(d) Mostre através de exemplos que, se $x_n\to 0$ e (y_n) diverge, então (x_ny_n) pode divergir ou convergir para qualquer limite.

Definição de limite

14. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas (em que $a\in\mathbb{R}$):

(a) Se à medida que n aumenta, a distância $|x_n-a|$ de x_n a a for cada vez mais pequena, então x_n converge para a.
(b) Se $x_n\to a$, então quanto maior é o n mais pequena é $|x_n-a|$.
(c) Se $x_n\to a$ então conseguimos encontrar termos da sucessão tão próximos de a quanto desejarmos.
(d) Se conseguirmos encontrar termos da sucessão tão próximos de a quanto desejarmos, então $x_n\to a$.

15. Considere a sucessão $x_n=1+1/\sqrt{n+1}$.

(a) Dada uma margem de erro $\varepsilon>0$ determine todos os valores de $n\in\mathbb{N}$ para os quais $|x_n-1|<\varepsilon$.
(b) Mostre que existe um p tal que $|x_n-1|<\varepsilon$ para qualquer $n>p$. Conclua que $x_n\to 1$.

16. Para cada $\varepsilon > 0$, determine os valores de $n \in \mathbb{N}$ tais que $|u_n - a| < \varepsilon$ e decida se $u_n \to a$ em cada um dos seguintes casos:

$$a)\ u_n = \frac{2n}{n+1}\,, \quad a = 2 \qquad\qquad c)\ u_n = \begin{cases} \frac{2n}{n+1}\,, & \text{se } n \leqslant 1000; \\ 3\,, & \text{se } n > 1000, \end{cases} \quad a = 2$$

$$b)\ u_n = \frac{n-1}{n+1}\,, \quad a = -1$$

17. Baseando-se directamente na definição de limite (ver exercício anterior) mostre que:

$$\text{(a)}\ \frac{n^2}{n^2+1} \to 1 \qquad \text{(b)}\ \frac{2n-1}{n+1} \to 2 \qquad \text{(c)}\ 1 - \sqrt{n} \to -\infty \qquad \text{(d)}\ \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \to 1$$

18. Prove, recorrendo à definição de limite em $\overline{\mathbb{R}}$, que

$$\text{(a)}\ \sqrt[3]{1-n} \to -\infty \qquad \text{(b)}\ \sqrt[4]{4+n^2} \to +\infty \qquad \text{(c)}\ \frac{n^2+1}{n} \to +\infty$$

19. Baseando-se directamente na definição de limite mostre que $(-1)^n/n! \to 0$.

20. Considere a sucessão $x_n = 17/n$.
 (a) Determine todos os valores de $n \in \mathbb{N}$ para os quais $|x_n - 2| < 1$.
 (b) Seja $\varepsilon = 1$. Existe algum p tal que $|x_n - 2| < \varepsilon$ para qualquer $n > p$? O que pode concluir sobre o limite de (x_n)?

21. Baseando-se directamente na definição de limite mostre que:

$$\text{(a)}\ 1/n \not\to +\infty \qquad \text{(b)}\ n^2 \not\to 100 \qquad \text{(c)}\ 1/n \not\to 0{,}1 \qquad \text{(d)}\ \frac{n+3}{n+2} \not\to \frac{3}{2} \qquad \text{(e)}\ 1 + (-1)^n \not\to 0$$

22. Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = 2\,, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

 (a) Mostre por indução que $u_n \in \mathbb{Q}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Mostre por indução que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
 (c) Assumindo que u_n é convergente, mostre que $\lim u_n = \sqrt{2}$.
 (d)* Mostre que u_n é convergente.

23.* Seja (x_n) uma sucessão e seja $\ell \in \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte propriedade: para qualquer $\varepsilon > 0$ existem sucessões (a_n) e (b_n) tais que $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, $a_n \to \ell - \varepsilon/2$ e $b_n \to \ell + \varepsilon/2$. Mostre que $x_n \to \ell$.

24. Mostre que
 (a) se $u_n \to +\infty$ então $1/u_n \to 0$;
 (b) se $u_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $u_n \to 0$ então $1/u_n \to +\infty$;

Será verdade que

$$u_n \to 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{u_n} \to +\infty \;\vee\; \frac{1}{u_n} \to -\infty\right)\ ?$$