Métodos de primitivação

Primitivação por partes

1. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

(a) $e^x(e^x + x)$	(b) $x \operatorname{sen} x$	(c) $e^x \operatorname{sen} x$
(d) $x^3 e^{-x}$	(e) $x^2 \operatorname{senh} x$	(f) $\arctan x$
(g) $\operatorname{arcsen} x$	(h) $\sqrt{x} \ln x$	(i) $x \arctan x$
(j) $x(1 + x^2) \arctan x$	(k) $\ln\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$	(l) $x^2 \ln^2 x$
(m) $\ln^2 x$	(n) $\ln^3 x$	(o) $\cos(2x) \ln(\tan x)$
(p) $\operatorname{sen}(x) \ln(1 + \operatorname{sen} x)$	(q) $3x\sqrt{1 - x^2} \operatorname{arcsen} x$	(r) $\dfrac{\ln x}{(1 + x)^2}$
(s) $\cosh(x) \cos(x)$	(t) $3^x \cos x$	(u) $\sqrt{x} \arctan(1/\sqrt{x}\,)$
(v) $\sqrt{x} \arctan(\sqrt{x}\,)$	(w) $\cos(\ln x)$	(x) $x^n \ln x$ $(n \in \mathbb{N})$

2. Usando uma substituição adequada e primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

(a) $x^3 e^{x^2}$ (b) $\dfrac{1}{x^3} \cos \dfrac{1}{x}$

3. Mostre que, para $n \in \mathbb{N}$, é válida a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int \ln^n |x| \, \mathrm{d}x = x \ln^n |x| - n \int \ln^{n-1} |x| \, \mathrm{d}x$$

4. (a) Usando o método de primitivação por partes, mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tem-se:

$$\int \frac{x^2 \, \mathrm{d}x}{(1 + x^2)^k} = \frac{1}{2(1 - k)} \left(\frac{x}{(1 + x^2)^{k-1}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^{k-1}} \right).$$

(b) Justifique que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^k} = -\frac{1}{2(1 - k)} \frac{x}{(1 + x^2)^{k-1}} + \left(1 + \frac{1}{2(1 - k)}\right) \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^{k-1}}.$$

(c) Utilize a alinea anterior para calcular $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2}$ e $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^3}$.

5. Calcule o valor dos integrais seguintes:

(a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{e^x} \, dx$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \operatorname{senh}(x) \cos(\pi x) \, dx$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(x + 1)^2} \arctan x \, dx$

6. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \, dt$. Mostre que

$$\int_0^1 F(x) \, dx = F(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

Primitivação de funções racionais

7. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais:

(a) $\dfrac{1}{1-x}$ (b) $\dfrac{1}{(x-3)^3}$ (c) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$

(d) $\dfrac{x}{1+(x-1)^2}$ (e) $\dfrac{2x+1}{x^2+4}$ (f) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$

(g) $\dfrac{x+1}{(x+2)^3}$ (h) $\dfrac{x+1}{a^2+x^2}$ (i) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$

8. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais, utlizando uma decomposição em fracções simples:

(a) $\dfrac{1}{x^2+x}$ (b) $\dfrac{x+1}{x(x-1)^2}$ (c) $\dfrac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}$

(d) $\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ (e) $\dfrac{x^5}{x^2-1}$ (f) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$

(g) $\dfrac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}$ (h) $\dfrac{x^4}{x^4-1}$ (i) $\dfrac{x^3+4x^2-4x}{x^4-16}$

(j) $\dfrac{3x^2+2}{x(x^2+2x+2)}$ (k) $\dfrac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$ (l) $\dfrac{2x^2+x-5}{(x+1)^2(x-3)}$

(m) $\dfrac{2x}{(x^2-1)(x+1)}$ (n) $\dfrac{x+2}{(4-x^2)(1+x^2)}$ (o) $\dfrac{1+x^2}{x^3-2x^2+x}$

(p) $\dfrac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$ (q) $\dfrac{2x^2+4x+3}{(1+x)(x^2+2x+2)}$ (r) $\dfrac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$

9. Determine a primitiva G, da função

$$g(x) = \frac{x+3}{x^4-x^2}$$

definida no intervalo $]1,+\infty[$ e que verifica a condição $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 3$.

Mudança de variável

10. Calcule o valor dos integrais seguintes, utilizando as substituições indicadas:

(a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}(1+4x)}\,dx, \quad t=\sqrt{x}$ (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x-3)\sqrt{1+e^x}}\,dx, \quad t^2 = 1+e^x$

(c) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x+1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx, \quad t=\ln x$ (d) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx, \quad t=e^x$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx, \quad t=\tan x$ (f) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{8}{\tan x(1+\operatorname{sen}^2 x)}\,dx, \quad t=\operatorname{sen} x$

11. Usando a substituição indicada num domínio apropriado, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{5}{2(x+1)(\sqrt{x}+2)}$, $x = t^2$

(b) $\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$, $1 - x = t^2$

(c) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+2x}}$, $1 + 2x = t^2$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $x = t^6$

(e) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}$, $1 + x = t^4$

(f) $\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{1-e^x}}$, $t = \sqrt{1-e^x}$

(g) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$, $t = e^x$

(h) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, $t^2 = 1 + e^x$

(i) $\dfrac{1}{x(4-\ln^2(x))}$, $t = \ln x$

(j) $\dfrac{1}{x\ln x(1-\ln x)}$, $t = \ln x$

(k) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}$, $t = \operatorname{sen} x$

(l) $\sec x$, $t = \operatorname{sen} x$,

(m) $\sec^3 x$, $t = \operatorname{sen} x$,

(n) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos^2 x}$, $t = \operatorname{sen} x$,

(o) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x)+3(\cos x-1)}$, $t = \cos x$

(p) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x(1+\cos^2(x))}$, $t = \cos x$

(q) $\dfrac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}$, $t = \operatorname{sen}(x)$

(r) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)}$, $t = \cos(x)$

(s) $\dfrac{1}{\cosh x}$, $t = \operatorname{senh}(x)$

(t) $\dfrac{1}{2+\tan x}$, $t = \tan x$

(u) $\sqrt{1-x^2}$, $x = \operatorname{sen} t$

(v) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$, $x = \cos t$, $y = \tan x$

(w) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $x = \sec t$,

(x) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x = \operatorname{sen}^2 t$

(y) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = \tan t$,

(z) $\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}$, $x = \sec t$.

12. Use as substituições indicadas para transformar a primitiva numa primitiva sem raízes quadradas. De seguida, para cada função, escolha a substituição que achar mais simples e calcule a primitiva.

(a) $\sqrt{1+x^2}$, $x = \tan t$

(b) $\sqrt{1+x^2}$, $x = \operatorname{senh} t$

(c) $\sqrt{x^2-1}$, $x = \sec t$

(d) $\sqrt{x^2-1}$, $x = \cosh t$

(e) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $x = \operatorname{sen} t$

(f) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $t^2 = 1 - x^2$

(g) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x = \tan t$

(h) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $t^2 = 1 + x^2$

(i) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x = \operatorname{senh} t$

(j) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $t^2 = x^2 - 1$

(k) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x = \sec t$

(l) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x = \cosh t$

13. (a) Mostre que fazendo a substituição $\tan(x/2) = t$, $x \in]-\pi, \pi[$, temos

$$\cos x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{t^2+1}.$$

(b) Justifique que esta substituição transforma qualquer função racional de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ numa função racional de t e aproveite para calcular uma primitiva das funções seguintes:

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}, \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}.$$

14. Seja f uma função injectiva e de classe C^1 num intervalo $[a,b] \subset D_f$, e seja f^{-1} a sua inversa. Mostre que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = bf(b - af(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$$

Exercícios suplementares

15. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $x \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{x}$ (b) $\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)$ (c) $\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}$

(d) $\dfrac{1+\ln^2 x}{x\,(1+\ln x)}$, (e) $x \ln \dfrac{1-x}{1+x}$ (f) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

(g) $\dfrac{\ln(\ln x)}{x \ln x}$ (h) $\dfrac{1}{x^3} e^{1/x}$, (i) $\cos(x)\ln(1+\operatorname{sen}^2 x)$

(j) $\dfrac{\ln(\ln x)}{x}$ (k) $x \arctan^2 x$, (l) $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$

(m) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+3\cos^2 x}$ (n) $\ln(\cos x)\tan(x)$ (o) $(\operatorname{arcsen} x)^2$

16. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\mathrm{e}^{x-1}(1+\mathrm{e}^x)$ (b) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}$ (c) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$

(d) $\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$ (e) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ (f) $\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$

(g) $\dfrac{\tan x}{\cos^3(x)}$ (h) $\dfrac{\arctan x}{x^2}$ (i) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$

(j) $x\arctan(1+x)$ (k) $\ln(\sqrt{1+x^2})$ (l) $x\ln(\sqrt{1+x^2})$

(m) $\operatorname{arcsen}(1/x)$ (n) $\mathrm{e}^x\ln(1+\mathrm{e}^{2x})$ (o) $\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$