Séries de potências

Domínio de convergência

1. Quais das seguintes séries são séries de potências?

(a) $\sum \frac{x^n}{n}$ (b) $\sum \frac{\cos^n x}{n!}$ (c) $\sum n\,x^{2n}$ (d) $\sum \mathrm{e}^{nx}x^n$

2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguinte séries de potências convergem absolutamente, convergem simplesmente ou divergem:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$, (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}$, (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$,

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1}$, (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n+1}$, (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+8^n}(x-1)^n$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n+1}$, (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}}$, (l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n$,

(m) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^6+1}}(1-x)^n$, (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$, (o) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+3)^n}{n^2+n+1}$,

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n(x-2)^n}{(4n)^n}$, (q) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^2(x-2)^n}{(2n)!}$.

3. Determine o maior intervalo aberto em que as seguintes séries de potências são absolutamente convergentes, e estude o comportamento das séries na fronteira desse intervalo.

(a) $\sum \frac{(x+2)^{2n}}{4^n+1}$ (b) $\sum \frac{(3x-2)^n}{(n+1)2^n}$ (c) $\sum \frac{(5x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

(d) $\sum \frac{(-1)^n(2x+3)^n}{n^2+1}$ (e) $\sum \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}(1-2x)^n$ (f) $\sum \frac{(2-3x)^{2n}}{\ln n}$

4. Determine para que valores reais de x são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes as seguintes séries. Indique também quais das séries são séries de potências.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{x-2}{x}\right)^n$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$. (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\sqrt{n}}}{2^n}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$

5. Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

(a) $\sum \frac{x^n}{4^n+2}$, (b) $\sum \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ (c) $\sum \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$

(d) $\sum \frac{(x-2)^n}{2^{2n}-1}$ (e) $\sum \frac{2n}{n^2+1}(x+1)^n$ (f) $\sum \frac{(2x-1)^n}{n^3+2}$

(g) $\sum \frac{(1-3x)^{2n}}{4^n(n+1)}$ (h) $\sum \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{(n+1)^n}$ (i) $\sum \frac{n!}{n^n}x^n$

(j) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

6.* Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n x^n$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente. Sugestão: escreva a série como a soma de duas séries.

7. Suponha que a série de potências de $\sum a_n x^n$ é convergente no ponto -3 e divergente no ponto 3.

(a) Indique, justificando, se a convergência da série no ponto -3 é simples ou absoluta.

(b) Indique o conjunto dos valores de x para os quais a série é absolutamente convergente e o conjunto dos valores de x para os quais a série é divergente.

(c) Dê um exemplo de uma série que verifique as condições requeridas no enunciado.

8. Sabendo que a série de potências $\sum c_k x^k$ converge para $x = -4$ e diverge para $x = 6$, o que pode concluir sobre a convergência das seguintes séries?

(a) $\sum c_k$ (b) $\sum c_k(-3)^k$ (c) $\sum (-1)^k c_k 9^k$ (d) $\sum 2c_k(-4)^k$

9. Mostre que o raio de convergência R duma série de potências $\sum c_k(x-a)^k$ é dado por

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

assumindo que o limite existe. Deduza uma fórmula semelhante para o raio de convergência duma série de potências $\sum c_k(x-a)^{2k+1}$.

10. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n}$

(a) Calcule o raio de convergência R da série. Sugestão: $\cos(\pi/4 + n\pi/2) = \pm\sqrt{2}/2$.

(b) Mostre que a série é simplesmente convergente para $x = \pm R$. Sugestão: imite a demonstração do critério de Leibniz.

Integração e derivação. Séries de Taylor

11. Calcule a derivada e uma primitiva da função $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}\,x^k}{k!}$.

12. Calcule a derivada de ordem 48 num ponto à sua escolha da função $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{2n}}{n!\sqrt{n}}$.

13. Desenvolva as seguintes funções em série de potências de x, indique o maior intervalo aberto no qual a série coincide com a função. Aproveite para calcular as derivadas $f^{(n)}(0)$ e decida se a função tem ou não um ponto crítico na origem, classificando-o em caso afirmativo.

(a) $\dfrac{3}{1-x^4}$ (b) $\dfrac{1}{1+9x^2}$ (c) $\dfrac{x}{4x+1}$

(d) $\dfrac{x}{9+x^2}$ (e) $\dfrac{x^2}{(1+x)^3}$ (f) $\ln(5-x)$

(g) $\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ (h) $\arctan(x/3)$ (i) $\ln(3+x)$

(j) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (k) $x^2 \mathrm{e}^{-x}$ (l) $x \arctan x$

(m) $\operatorname{sen}(x^4)$ (n) $x\cos(2x)$ (o) $\mathrm{e}^{-x^2} + \cos x$

(p) 2^x (q) $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ (r) $\dfrac{1}{(x-1)^2}$

(s) $x^2 \operatorname{sen}(2x)$ (t) $\dfrac{x^4}{1-2x}$ (u) $x\ln(1+x^3)$

14. Desenvolva as seguintes funções em série de Taylor no ponto a, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Aproveite para determinar as respectivas derivadas de ordem n em a e decida se a função tem ou não um ponto crítico em a, classificando-o em caso afirmativo.

(a) $\mathrm{e}^{2x+1}, \quad a=0$ (b) $\dfrac{x}{2x+1}, \quad a=0$ (c) $\cos(x+1)^2, \quad a=-1$

(d) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \quad a=0$ (e) $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,\mathrm{d}t, \quad a=0$ (f) $\displaystyle\int_0^{x^2} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t, \quad a=0$

(g) $\dfrac{1}{(x+1)^2}, \quad a=0$ (h) $\dfrac{1}{1+x}, \quad a=1$ (i) $\arctan x^2, \quad a=0$

(j) $\ln(x^2+1), \quad a=0$ (k) $(x-1)\mathrm{e}^x, \quad a=1$ (l) $\ln x, \quad a=2$

15. Escreva a função $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (2x)^{2n}/3^n$ como a restrição duma função racional. Qual o domínio de f?

16. Calcule o domínio de convergência e a soma das séries seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{n+1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{4^{n+1}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!3^n} x^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+1)^{2n+1}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} x^{4n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n\, n!}$

17. Calcule a soma das séries

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k x^k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

18. Use séries de Taylor para calcular os limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\,\mathrm{e}^{-x^2/6}}{x^5}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos(x/\sqrt{3})}{x^5}$

19. Considere a série de potências $\sum \dfrac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$

(a) Determine o raio de convergência da série e indique, justificando, em que pontos é que a série converge absolutamente.

(b) Supondo que a função g é definida pela igualdade

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

no conjunto de todos os pontos onde a série é convergente, calcule $g(1)$ e $g''(1)$ e escreva a série de Taylor no ponto 1 da função $x + g'(x)$.

20.* Usando séries de Taylor calcule os seguintes integrais com um erro inferior a 0,001:

(a) $\displaystyle\int_0^{0,2} x\cos(x^3)\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{0,2} \arctan x\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{0,2} \operatorname{sen}(x^3)\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{0,5} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$

21.* Considere a função

$$f(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{xt^2}\, \mathrm{d}t$$

(a) Mostre que a série de Taylor de f na origem é dada por

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k+1)k!}$$

(b) Mostre que

$$f'(x) = \int_0^1 t^2 \mathrm{e}^{xt^2}\, \mathrm{d}t$$

22. Seja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Calcule os coeficientes c_k de modo a que f satisfaça as seguintes equações:

(a) $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$ (b) $f''(x) + f(x) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

23.* Verifique que a função

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$$

satisfaz

$$x\, f''(x) + f'(x) + x\, f(x) = 0\ , \quad f(0) = 1$$

24.* Calcule os seguintes integrais com um erro inferior a 0,001:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$ (b) $\displaystyle\int_0^{0,1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n+3}$

25.* Seja $\sum a_k$ uma série absolutamente convergente e considere a função $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(k\pi x)$ (a este tipo de série chamamos série de Fourier).

(a) Mostre que o domínio de f é $\mathbb{R}$.

(b) Assumindo que f é integrável, mostre que

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b a_k \operatorname{sen}(k\pi x)\, \mathrm{d}x$$

(c) Mostre que

$$a_n = 2\int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(n\pi x)\, \mathrm{d}x$$