Séries numéricas

1. Calcule, para $n = 1, 2, 3$, o termo geral a_n e as somas parciais S_n da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$. Calcule também a soma da série.

2. Calcule a soma da série geométrica $1/2 + 1/10 + 1/50 + 1/250 + 1/1250 + 1/6250 + \cdots$

3. Sabendo que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$, calcule a soma das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n^2} + \frac{\mathrm{e}^n}{\pi^n}\right)$

4. Calcule as somas parciais de cada uma das seguintes séries de Mengoli e determine se a séries é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule a sua soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\left(n - (n+1)e^{-1}\right)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\arctan(n+2) - \arctan(n)\right)$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{n} - \sqrt[n]{n-1}\right)$

5. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^{n-1}} + \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{2n}}{6^{n-1}} + \frac{1}{n!}\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{2^{2n}} + \frac{3^n}{n!}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right)$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\sqrt{2})^n} + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^n}{3^{n-1}} + \frac{2^n}{n!}\right)$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left((0.8)^{n-1} - (0.3)^n\right)$

6. Dada uma série $\sum a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $b_{2n-1} = 0$ e $b_{2n} = a_n$. Mostre que a série $\sum b_n$ converge se e só se a série $\sum a_n$ convergir tendo nesse caso a mesma soma.

Séries de termos positivos

7. Mostre que cada uma das seguintes sucessões é assimptoticamente equivalente a uma sucessão da forma $(n^b)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(1/n!)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $\dfrac{n+1}{(n+2)4^n}$ (b) $\dfrac{\sqrt{n+3}}{n^2+1}$ (c) $\dfrac{n+2}{\sqrt{n(2n^2-1)}}$ (d) $\dfrac{n+(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$

(e) $\operatorname{sen}(1/\sqrt{n}\,)$ (f) $\ln(1+1/n)$ (g) $e^{1/n^2}-1$ (h) $\arctan(2^{-n})$

(i) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$ (j) $\dfrac{2^{2n}+n}{3^n+\ln n}$ (k) $\dfrac{n^2+2}{(n+2)!+\ln n}$ (l) $\dfrac{n^3+2^n}{3^n+n^2}$

(m) $\dfrac{\arctan n}{n+3}$ (n) $n\operatorname{sen}(1/n^2)$ (o) $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}\sqrt[3]{n+3}}$ (p) $\dfrac{2^n+\ln n}{5^n+2^n n!}$

(q) $\dfrac{2^n+3n+4\ln n}{n^5+2^n+\ln n}$ (r) $\dfrac{\sqrt{n^3+\ln n}}{2n+(-1)^n}$ (s) $\dfrac{(n-1)!-4^n}{n!(2n+1)}$ (t) $\dfrac{n^n+n!}{(2n)^n+(-3)^n+2}$

8. Use o critério da comparação pelo limite para determinar a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+2}$ (b) $\sum \dfrac{n}{\sqrt{(n^3+2)(n^2+1)}}$ (c) $\sum \dfrac{n+3^n}{2^n+5^n}$

9. Use o critério do integral para determinar a natureza das séries:

(a) $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ (b) $\sum \dfrac{1}{n\ln^2 n}$

10. Use o critério da comparação para determinar a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum \dfrac{1}{n^2\ln n}$ (b) $\sum \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

11. Use o critério da comparação pelo limite para determinar a natureza das seguintes séries, comparando-as com séries de Dirichlet:

(a) $\sum \dfrac{\ln n}{n^3}$ (b) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

12. Justifique que as séries

$$\sum \frac{1}{n\ln^p n} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{n^p\ln n}$$

convergem para $p>1$ e divergem para $p\leqslant 1$.

13. Confirme a desigualdade dada pelo critério do integral:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

no caso da função $f(x)=e^{-x}$. Generalize para o caso da função $f(x)=a^{-x}$, com $a>1$.

14. Use o critério integral para estimar o erro $E=\sum_{k=5}^{\infty} 1/k^4$ da aproximação

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} \approx 1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256} = 1.0787519\ldots$$

15. Use o critério da comparação para estimar o erro $E=\sum_{k=4}^{\infty} 1/(1+4^k)$ da aproximação

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+4^k} \approx \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17}+\frac{1}{65} = 0.7742081\ldots$$

16. Use o critério do integral para determinar a natureza das seguintes séries. No caso de elas serem convergentes, determine quantos termos precisa de somar para obter uma estimativa da soma com um erro inferior a 0.001.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\mathrm{e}^{-n^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4}$

17. Use o critério da comparação para justificar que as seguintes séries são convergentes e estime o erro cometido ao aproximar a soma da série pelos primeiros 10 termos.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^5}$

18. Determine quantos termos precisamos de somar para garantir que:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 18$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k^{2/3}} > 9$

19. (a) Justifique que, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \,]0,+\infty[$$

então para qualquer sucessão $a_n \geqslant 0$ tal que $a_n \to 0$, as séries $\sum f(a_n)$ e $\sum a_n$ têm a mesma natureza.

(b) Determine a natureza das séries:

$\displaystyle\sum_{n} \operatorname{sen}(1/n^p)$ $\displaystyle\sum_{n} \big(\mathrm{e}^{1/n^p}-1\big)$ $\displaystyle\sum_{n} \arctan(1/n^p)$

20. Sendo (a_n) uma sucessão de termos positivos, indique justificando a natureza das séries

(a) $\displaystyle\sum (1+a_n)$ (b) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2+a_n}$

Séries alternadas e convergência absoluta

21. Estude quanto à convergência a série: $\sum \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/6)}{n^2+1}$

22. Determine quais das seguintes séries são alternadas. Decida também se são simplesmente convergentes, absolutamente convergentes ou divergentes.

(a) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum (-1)^n \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ (c) $\sum \dfrac{(-1)^n \cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum \dfrac{2+(-1)^n}{n}$

(e) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^5}$ (f) $\sum (-2)^n$ (g) $\sum \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

23. Determine se são absolutamente covergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries. Para as séries convergentes, estime o erro cometido ao aproximar a soma da série pela soma dos primeiros 10 termos.

(a) $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ (b) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (c) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

(d) $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n^2-1}$ (e) $\sum (-3)^{-n}$ (f) $\sum (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

(g) $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ (h) $\sum (-1)^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (i) $\sum (-1)^n \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$

24. Sejam (a_k) e (b_k) sucessões tais que (b_k) é limitada.

(a) Mostre que, se a série $\sum a_k$ é absolutamente convergente então a série $\sum (a_k b_k)$ é também absolutamente convergente.

(b) Use o resultado anterior para mostrar que, se a série $\sum a_k$ é absolutamente convergente então a série $\sum a_k^2$ é também absolutamente convergente.

(c) Mostre através dum exemplo que a recíproca da afirmação anterior é falsa.

Exercícios suplementares

25. Determine a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum \frac{n!}{(2n)!}$ (b) $\sum \frac{n}{(n+1)3^n}$ (c) $\sum \frac{2^n n}{\mathrm{e}^n}$ (d) $\sum \frac{n^3}{3^n}$

(e) $\sum \frac{n^4}{n!}$ (f) $\sum \frac{\ln n}{n}$ (g) $\sum \frac{1}{\ln n}$ (h) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

(i) $\sum \frac{3^n n!}{n^n}$ (j) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ (k) $\sum \frac{n-2}{3n+1}$ (l) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(m) $\sum \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}$ (n) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ (o) $\sum \frac{n+1}{n^3+1}$ (p) $\sum \frac{n}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

(q) $\sum \frac{n^2}{n^3+1}$ (r) $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ (s) $\sum \frac{5^n}{4^n+1}$ (t) $\sum \frac{2^n}{3^n+1}$

(u) $\sum \operatorname{sen}(1/n^2)$ (v) $\sum \ln\bigl(1+1/\sqrt{n}\,\bigr)$ (w) $\sum \bigl(\mathrm{e}^{1/n}-1\bigr)$ (x) $\sum \frac{n!}{(n+2)!}$

(y) $\sum \frac{2^{2n}}{3^n+1}$ (z) $\sum \left(\frac{n^2+\ln n}{4n^2+1}\right)^n$

26. Determine a natureza das seguintes séries, usando critérios de convergência apropriados:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n!}$, (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-4}{n^4-1}$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1-2^n}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$, (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3}$,

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}}$, (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}+1}$, (l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$,

(m) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$, (n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, (o) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2-1}$,

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$, (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$, (r) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

27. Determine a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+4}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{e^n}$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2^n}$, (e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$, (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(1.001)^n}$, (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}\sqrt[4]{n+2}}$, (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$, (l) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n}$, (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n!}{n!}$, (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$.

28. Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries alternadas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+n}{n}\right)$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+2}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{3000}}{3^n}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$, (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+2}$,

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$, (j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$, (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ (n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-1}$, (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-4)^{-n+1}$ (p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$