Integral

Mudança de variável

1.

(a) $y = \ln x$	(b) $y = \arctan x$	(c) $y = \cos x$
(d) $y = \mathrm{e}^x$	(e) $y = x^2$	(f) $y = 1/x$
(g) $y = \sqrt{x}$	(h) $y = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$	(i) $y = x^2 \quad \text{e} \quad z = \cos y$

2.

(a) $4/(3\pi) + (\ln 3)/4$	(b) $\ln 3$
(c) $\ln 4$	(d) Sugestão: $y = -x$

3.

(a) $2 + 5\pi$ (b) $5\pi/8$

(c) Sugestão: $y = \pi/2 - x$. (d) Sugestão: mostre que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x \,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}^6 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^6 x \,\mathrm{d}x$.

4. $y = \sqrt{x}$

5. $u = 1/t$.

6. $u = tx$

7. $u = 1/t$

8. (a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Para mostrar que f é par faça $u = -t$.
(b) $\big(\cos(3x) - \cos(x)\big)/x$
(c)* Sugestões: use a relação $\cos t \leqslant 1$ para mostrar que $f(x) \leqslant \ln 3$; note também que, como f é par, $f(0^+) = f(0^-)$.

9. (a) Sugestão: $u = -t$.
(b) Sugestão: derive.
(c)

Integrais impróprios

10. (a) e (c)

11.

(a) 6	(b) diverge	(c) diverge
(d) $-9/2$	(e) diverge	(f) $1/3$
(g) $1/2$	(h) diverge	(i) diverge
(j) π	(k) diverge	(l) diverge

12. Não se esqueça de tratar separadamente o caso $a = 1$.

(a) Converge para $a < 1$, igual a $1/(1-a)$.

(b) Converge para $a > 1$, igual a $1/(a-1)$.

(c) Diverge.

Somas de Darboux

13. $(1+\sqrt{2}+2\sqrt{3})/24$

14. $739 < d < 824$

15.

16.

(a) (b) (c) (d)

17.

(a) $\underline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n^2}$, $\overline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$ (b) $\underline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{i}{n}\right)$, $\overline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{i-1}{n}\right)$

(c) $\underline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$, $\overline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i-1}$ (d) $\underline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} \frac{4(i-1)^2}{2n^3}$, $\overline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{2n^3}$

18. (a) Se $x_i = 1$ para algum i então $\underline{S}_P = 1+2(x_{+1}i-1)+3(2-x_{i+1})$ e $\overline{S}_P = x_{i-1}+2(1-x_{i-1}+3$. Caso contrário $x_{i-1} < 1 < x_i$ para algum i e temos $\underline{S}_P = x_i+3(2-x_i)$ e $\overline{S}_P = x_{i-1}+3(2-x_{i-1})$.
(b) Considere a partição $P_\varepsilon = \{0, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon, 2\}$.

19.

20.

21.

22. (a) Sugestão: $\mathbb{Q}$ é denso.
(b) Sugestão: calcule o integral de x.
(c) Sugestão: mostre que o integral inferior é zero.

23.

24. Sugestão: $\sup(-f) = -\inf f$ e $\inf(-f) = -\sup f$.

25.

26.

27. (a) Sugestão: soma telescópica.
(b) Sugestão: Teorema de Lagrange
(c) Sugestão: Mostre que para qualquer partição P temos $\underline{S}_P(F') \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \overline{S}_P(F')$.

28. Sugestão: mostre que $\inf \overline{S}_P(f) = 0$; para tal, dado qualquer $\varepsilon > 0$ construa uma partição P de $[0,1]$ tal que $\overline{S}_P(f) < \varepsilon$.

Aplicações do integral

29. Área da região sobre o intervalo $[-1,1]$ entre os gráficos de $1+\cos x$ e de x^2.

30.

(a) $32/3$ (b) $18\sqrt{2}$ (c) $44/3$ (d) $1/3$

(e) $1/12$ (f) $2+\pi^3/6$ (g) $\mathrm{e}-3/2$ (h) $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}-2$

(i) 2 (j) $1/3$ (k) $2\sqrt{2}$ (l) $15/4$

31. (a) $1/2$ (b) $7/48$ (c) $15/4$ (d) $5/6$

32. $\pi/4$

33.

(a) $a(\ln a - 1) + 1$ (b) $\sqrt{2} - 1$ (c) 2

(d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ (e) $-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{3}$

34. $\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{4\pi}{3}$

35. 2π

36.

37.

38.

39.

40. $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^3$

41.