Integral

Mudança de variável

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, usando mudanças de variável adequadas:

(a) $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}$ (b) $\dfrac{\arctan(x)\cos(\arctan^2 x)}{1+x^2}$ (c) $\dfrac{\operatorname{sen} x\, \mathrm{e}^{\sqrt{\cos x}}}{\sqrt{\cos x}}$

(d) $\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)\operatorname{sen}^2(\mathrm{e}^x)$ (e) $\dfrac{x\cos(x^2)}{\operatorname{sen}^2(x^2)}$ (f) $\dfrac{\operatorname{sen}(1/x)\sqrt{\cos(1/x)+1}}{x^2}$

(g) $\dfrac{\sqrt{\arctan\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+x)}$ (h) $\operatorname{sen}(2x)\mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2 x}$ (i) $\dfrac{x\cos(x^2)}{\operatorname{sen}(x^2)\ln\big(\operatorname{sen}(x^2)\big)}$

2. Sabendo que $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \ln 3$, calcule

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\operatorname{sen}(x\sqrt{x}\,\pi)+\frac{1}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4-\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+4}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{4}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

3. Sabendo que $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^6 x\,\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{16}$, calcule

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x + 16\operatorname{sen}^6 x\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}^6(\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 x\,\mathrm{d}x$

Interprete geometricamente as alíneas (c) e (d).

4. Mostre que: $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y.$

5. Sendo

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{e}^{(t^2+1)/t}\,\mathrm{d}t$$

mostre que $f(1/x) = -f(x)$.

6. Seja $f\colon\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja

$$F(x) = \int_{1/x}^{1/x^2} f(tx)\,\mathrm{d}t$$

Justifique que F é diferenciável em $]0,+\infty[$, e mostre que

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(xF(x)+\frac{1}{x}f\Big(\frac{1}{x}\Big)\right)$$

7. Mostre que, para qualquer $x > 0$

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

8. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Determine o seu domínio e mostre que f é par.
(b) Mostre que f é diferenciável e calcule a sua derivada.
(c)* Mostre que existe $a > 0$ tal que f é monótona e limitada em $]0, a[$. Que pode concluir da existência de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

9. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em qualquer intervalo limitado e considere as seguintes relações (R):

$$\text{(R)} \qquad \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-x}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Mostre que se f é par e g é ímpar então f e g satisfazem as relações (R).
(b) Mostre que se f e g são contínuas e satisfazem as relações (R) então f é par e g é ímpar.
(c) Forneça exemplos de funções f e g que verifiquem as relações (R) e que não sejam par nem ímpar respectivamente.

Integrais impróprios

10. Quais dos seguintes integrais são impróprios? Porquê?

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x-3}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x-3}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^{10}}\,\mathrm{d}x$

11. Decida se os seguintes integrais impróprios são convergentes, e calcule-os em caso afirmativo:

(a) $\displaystyle\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ (b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x-5}$

(d) $\displaystyle\int_3^{12} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-11}}$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec^2 x\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^4}$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$ (i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ (k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$ (l) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

12. Decida para que valores de $a \in \mathbb{R}$ os seguintes integrais impróprios são convergentes e calcule-os.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a}$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^a x}$

Somas de Darboux

13. Calcule a soma de Darboux inferior da função $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ com a partição $P = \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$.

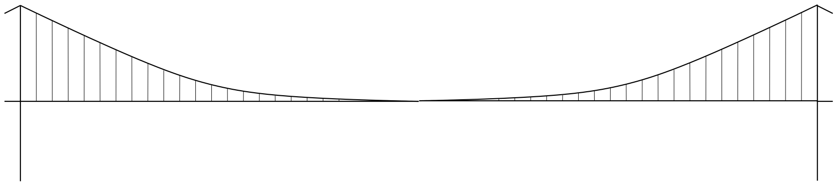
14. A tabela seguinte mostra os resultados de medições da velocidade $v(t)$ dum carro a travar:

t	0	3	6	8	9
$v(t)$	100	96	83	70	62

Sabendo que a distância é dada pelo integral da velocidade, use somas de Darboux para estimar a distância d percorrida de $t = 0$ até $t = 10$.

15. A ponte suspensa na figura tem duas torres distando 1000 metros uma da outra, entre as quais estão suspensos dois cabos grossos paralelos. Destes cabos saem, de 20 em 20 metros, cabos mais finos que seguram o tabuleiro da ponte. Assumindo que a distância vertical dos cabos grossos à ponte é dada pela função $h(x) = x^2/2000$, interprete a soma total S dos comprimentos dos cabos finos como somas de Darboux de h e use integrais para mostrar que

$$48^3/30 < S < (50^3 - 8)/30$$



16. Calcule os seguintes limites. Comece por identificar a soma com uma soma de Darboux associada a uma partição de $[0,1]$ em n intervalos iguais.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n^{\frac{3}{2}}}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-n}{n^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i^2+n^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$

17. Escreva as somas de Darboux inferiores e superiores das seguintes funções f no intervalo I indicado, correspondentes a uma partição do intervalo em n intervalos iguais.

(a) $f(x) = x, \quad I = [0,1]$ (b) $f(x) = \cos x, \quad I = [0,1]$

(c) $f(x) = 1/x, \quad I = [1,2]$ (d) $f(x) = x^2, \quad I = [0,2]$

18. Considere a função $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ para $x < 1$, $f(1) = 2$ e $f(x) = 3$ para $x > 1$.

(a) Mostre, recorrendo à definição, que para qualquer partição P do intervalo $[0,2]$ as somas de Darboux inferior e superior verificam $\underline{S}_P \leqslant 4 \leqslant \overline{S}_P$.

(b) Recorrendo directamente à definição, mostre que a função f é integrável em $[0,2]$ e que $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

19. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função decrescente. Mostre que para todo o $n > 0$ se tem:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \leqslant \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\,.$$

20. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Mostre que para todo o $n > 0$ se tem:

$$\int_0^{n-1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leqslant \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

21. Mostre que, se f é constante igual a c, então as somas de Darboux de f no intervalo $[a,b]$ são $\underline{S}_P f = \overline{S}_P f = c(b-a)$ para qualquer partição P.

22. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(a) Mostre que as somas superiores de Darboux de f coincidem com as somas superiores da função $g(x) = x$.

(b) Mostre que o integral superior de f em $[0,1]$ é igual a $\frac{1}{2}$.

(c) Justifique que f não é integrável em $[0,1]$.

23. Dadas funções limitadas $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo o $x \in [a,b]$, mostre que para qualquer partição P do intervalo $[a,b]$ temos $\underline{S}_P f \leqslant \underline{S}_P g$ e $\overline{S}_P f \leqslant \overline{S}_P g$.

24. Dada uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, mostre que para qualquer partição P do intervalo $[a,b]$ temos $\underline{S}_P(-f) = -\overline{S}_P f$ e $\overline{S}_P(-f) = -\underline{S}_P f$.

25. Dada uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma constante $c > 0$ mostre que para qualquer partição P do intervalo $[a,b]$ temos $\underline{S}_P(cf) = c\underline{S}_P f$ e $\overline{S}_P(cf) = c\overline{S}_P f$.

26. Verifique que as somas de Darboux inferiores e superiores da função $f(x) = x$ associadas à partição do intervalo $[1,3]$ em n intervalos iguais são respectivamente

$$\underline{S}_n = 4 - 2/n \quad \text{e} \quad \overline{S}_n = 4 + 2/n$$

e portanto $\lim \underline{S}_n = \lim \overline{S}_n = \int_1^3 x\,\mathrm{d}x$.

27. Seja $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada F' integrável à Riemann em $[a,b]$.

(a) Dada uma partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ mostre que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big)$$

(b) Mostre que para cada i existe um ponto $c_i \in \,]x_{i-1}, x_i[$ tal que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

(c) Mostre que

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

28. Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a função tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos $f(1/n) = 1$ e $f(x) = 0$ nos outros pontos. Mostre que f é integrável à Riemann em $[0,1]$ apesar de ter um número infinito de descontinuidades.

Aplicações do integral

29. Interprete o integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos x - x^2 + 1\,\mathrm{d}x$ como a área duma região R do plano e esboce R.

30. Calcule as áreas das regiões do plano limitadas pelas curvas:

(a) $y = x + 1$ e $y = x^2 - x - 2$

(b) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$

(c) $y = 4 - x^2$ e $y = |x| - 2$

(d) $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$

(e) $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt{x}$

(f) $y = x^2 - (\pi^2/4)$ e $y = \cos x$

(g) $y = \mathrm{e}^x$, $y = 1 - x$ e $x = 1$

(h) $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$ e $x = 2$

(i) $y^2 = 4(1 - x)$, $y^2 = 2(2 - x)$

(j) $y = x^2$, $y = |x|$

(k) $|x| = \pi/2$, $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$

(l) $x^2 y = 1$, $y = -27x$ e $x = -8y$

31. Calcule as áreas das seguintes regiões do plano:

(a) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant x^2,\ y \leqslant x \text{ e } y \geqslant \tfrac{1}{2}x^2\big\}$

(b) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant \tfrac{1}{2}x,\ y \leqslant x \text{ e } y \geqslant x^2\big\}$

(c) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant x,\ y \geqslant x^3,\ y \leqslant 4x\big\}$

(d) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant 2,\ y \leqslant x,\ y \geqslant \sqrt{x}\big\}$

32. Escreva, justificando cuidadosamente, um integral que permita calcular a área da seguinte região, e calcule esse integral:

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x\big(1 + \ln^2 x\big)}\Big\}$$

33. Calcule, integrando na variável y, as áreas das regiões do plano limitadas pelas curvas:

(a) $y = 0$, $y = \ln x$, $x = a$ $(a > 1)$

(b) $y = 0$, $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$

(c) $y = \ln(1 + x)$, $y = -\ln(1 + x)$, $x = \mathrm{e} - 1$

(d) $y = \arctan x$, $x = 1$, $y = 0$

(e) $y = \pi/4$, $y = \frac{\pi}{16}x^2$, $y = \arctan x$

34. Considere a região do plano R_1 definida pelas condições $x^2 + y^2 \leqslant 4$ e $y \geqslant \sqrt{3}x^2$. Escreva R_1 como a união dum sector circular com outra região R_2 e use essa divisão para calcular a área de R_1.

35. Calcule a área limitada pela elipse de equação $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$. Para tal relacione o integral com um integral que calcula a área do disco de raio 2 centrado na origem.

36. Uma chapa metálica fina foi cortada na forma da região

$$R = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leqslant 1\,,\; x \geqslant \tfrac{1}{2} \,\}$$

Calcule a massa da chapa sabendo que a densidade é constante em linhas verticais, dada por $\rho = x$ (em g/cm^2). Sugestão: divida a região em faixas verticais.

37. Sabendo que começa a chover em $t = 0$ e que a quantidade de chuva a cair, passadas t horas, é dada pela expressão $(t+6)/6$ centímetros por hora, calcule a quantidade de chuva (em centímetros) que cai nas primeiras 12 horas.

38. Calcule o volume do cone com base no círculo de raio 1 e altura 2.

39. Calcule o volume da pirâmide quadrangular com base no quadrado com vértices $(\pm 1, \pm 1)$ e altura 1.

40. Mostre que o volume do sólido obtido fazendo um buraco cilíndrico de raio r_1 pelo centro duma esfera de raio $r_2 > r_1$ depende apenas da altura h do sólido e calcule esse volume.

41. Assumindo que a taxa de evaporação da água num recipiente é proporcional à área da superfície da água mostre que o nível de água diminui a um ritmo constante, independentemente da forma do recipiente.