Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Exame - 26 de Janeiro de 2009 - 13h00m
Cursos: LEGM, LET, MEC

Apresente todos os cálculos que efectuar.
Não é necessário simplificar os resultados.

Problema 1 (1.5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2) \qquad (b)\ g(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \qquad (c)\ h(x) = \int_{2x}^{1} e^{t^2}\, dt$$

Problema 2 (1.5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \qquad (b)\ g(x) = e^{\sqrt{x}} \quad (\text{Sugestão: } x = y^2)$$

Problema 3 (1 val.) Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ a região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 3-2x^2$.

(a) Esboce a região R.
(b) Calcule a área de R.

Problema 4 (1.5 val.) Calcule os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to\pi^+} \arctan\left(\tfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) \quad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos(\frac{x}{\sqrt{3}})}{x^5} \quad (c)\ \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x) + x}{x^4 - 2x^2 + 3x - 2}$$

(Sugestão: Fórmula de Taylor)

Problema 5 (4.5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Decida se f é ou não contínua em $x = 0$.
(b) Determine os intervalos de monotonia de f.
(c) Mostre que f possui um ponto de inflexão (mudança de concavidade) em $x = -\frac{1}{2}$.
(d) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Sugestão: $y = \frac{1}{x}$.
(e) Esboce o gráfico de f indicando nele claramente o resultado da alínea (d).
(f) Seja $g :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Estude a monotonia e a concavidade de g.

Problema 6 (1 val.) Determine se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Virar a página ⟶

Problema 7 (1.5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = e^{-x} e^{e^{-x}}$.

(a) Mostre que f é estritamente decrescente.

(b) Calcule $\displaystyle\int_0^b f(x)\, dx$.

(c) Determine se a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ é convergente ou divergente.

Problema 8 (2 val.) Seja $f(x) = xe^x$.

(a) Mostre por indução que a derivada de ordem n de f é dada por

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

(b) Determine o polinómio de Taylor de f de ordem 2 no ponto $a = -1$.

(c) Seja agora $p_6(x)$ o polinómio de Taylor de f de ordem 6 no ponto $a = -1$. Determine o sinal de $f(x) - p_6(x)$ no intervalo $]-7, -1[$. Justifique a sua resposta.

Problema 9 (1.5 val.) Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$.

(a) Determine o raio de convergência da série.

(b) Mostre que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = 1$.

Problema 10 (2 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável estritamente crescente. Na tabela seguinte estão indicados alguns valores de f e f':

x	0	1	2	3	4	5	6
f	0	2	4	5	6	7	9
f'	1	3	5	2	4	7	6

(a) Calcule a derivada de $f(x^2+1) + f(x)^2 + 1$ no ponto $x = 2$.

(b) Seja g a função inversa de f. Calcule $g'(2)$.

(c) Mostre que existe um $c \in]2, 4[$ tal que $f'(c) = 1$.

(d) Mostre que $15 \leq \int_2^5 f(x)\, dx \leq 18$.

Problema 11 (2 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f'(x) \leq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre através dum exemplo que f pode não ser nem injectiva nem constante. Justifique cuidadosamente a sua resposta.

(b) Vamos agora assumir que todo o intervalo aberto não vazio de $\mathbb{R}$ tem um ponto em que a derivada de f não se anula. Mostre que nestas condições f é estritamente decrescente. Justifique cuidadosamente a sua resposta.