Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Exame - 12 de Janeiro de 2008 - 13h00m
Cursos: LEGM, LET, MEC

Apresente todos os cálculos que efectuar.
Não é necessário simplificar os resultados.

Problema 1 (1 val.) Seja $f(x) = \log(\,3 - |x-2|\,) + \sqrt{x}$.

(a) Mostre que o domínio de f é $Df = [\,0,5\,[$.
(b) Determine, se existirem, o supremo e o ínfimo de Df.

Problema 2 (5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = xe^{-x}$.

(a) Determine os intervalos de monotonia de f.
(b) Estude a concavidade de f.
(c) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
(d) Esboce o gráfico de f. Pode usar o facto de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
(e) Determine os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[-1,4]$.
(f) Justifique que f é injectiva em $]-\infty,-1]$.
(g) Seja g a inversa de f em $]-\infty,-1]$. Determine o domínio de g.
(h) Calcule a derivada de g no ponto $-2e^2$.

Problema 3 (1.5 val.) Calcule os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \tfrac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6}}{x\left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right)}$$

Problema 4 (1.5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(a)\ f(x) = (\,\operatorname{sen}(e^x)\,)^3 \qquad (b)\ g(x) = \int_1^{x^3} \cos(t^4)\,dt \qquad (c)\ h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}\,x^k}{k!}$$

Problema 5 (1 val.) Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{se} \quad x > 0 \\ b\operatorname{sen} x + 2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) Determine a de forma a f ser prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$.
(b) Seja $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o prolongamento obtido na alínea (a). Determine b de forma a $\tilde{f}$ ser diferenciável em $x = 0$.

Problema 6 (2 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

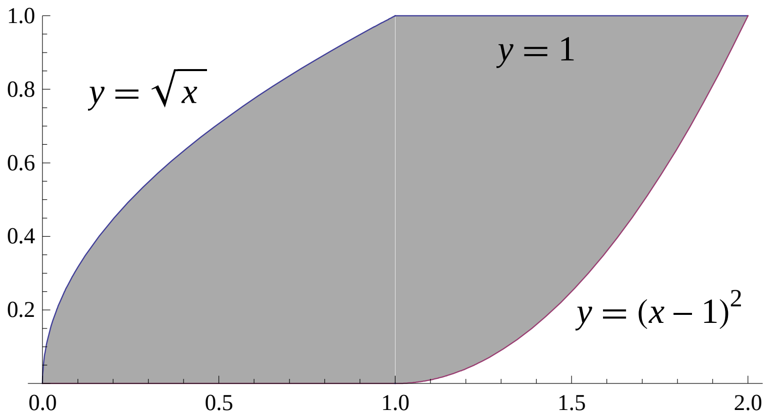
$$(a)\ f(x) = \frac{\cos(\log x)}{x} \qquad (b)\ g(x) = x^5 \log x \qquad (c)\ h(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

(d) Seja $H(x)$ uma primitiva de $h(x)$. Usando uma substituição adequada mostre que

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx = H(e) - H(1)$$

Virar a página $\longrightarrow$

Problema 7 (1 val.) Calcule a área da região do plano ilustrada na figura seguinte:



Problema 8 (1 val.) Determine a série de Taylor no ponto $x = 0$ das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = x^2 e^{x^2} \qquad\qquad (b)\ g(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

Problema 9 (1 val.) Mostre por indução que $n! > 2^n$ para qualquer inteiro $n \geq 4$.

Problema 10 (1 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!} \qquad\qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\frac{1}{3}}}$$

Problema 11 (1.5 val.) Seja $p(x) = 2x+3$ o polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto $a = 0$ duma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ três vezes diferenciável.

(a) Determine $f(0)$, $f'(0)$ e $f''(0)$.
(b) Sabendo que $f'''(x) = \cos x$ determine $f(x)$.
(c) Mostre que se $x \in [0,1]$ então $|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{6}$.

Problema 12 (1.5 val.) Seja $f(x) = \cos x - x$.

(a) Mostre que f tem pelo menos um zero.
(b) Mostre que f tem exactamente um zero. Justifique cuidadosamente a sua resposta.

Problema 13 (1 val.) Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é de Lipschitz se existir uma constante K tal que para quaisquer $x, y \in D$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Mostre que uma função de Lipschitz é contínua. Justifique cuidadosamente a sua resposta.