Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 10 de Novembro de 2018 - 9h00m

Curso: MEAer

(3,0 val.) **1.** Considere os conjuntos $A = \{-e^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \mathbb{Q} \cap [1, \sqrt{2}]$

(a) Determine o supremo, o ínfimo e os pontos de acumulação de $A \cup B$.

(b) Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras, justificando brevemente em caso afirmativo ou apresentando um contra exemplo em caso negativo:

(i) Se (x_n) é uma sucessão convergente em $A \cup B$ então $\lim x_n \in \left]-1, 2\right[$.

(ii) Qualquer função contínua $g\colon B \to \mathbb{R}$ tem máximo.

(iii) Qualquer função decrescente $f\colon B \to \mathbb{R}$ tem máximo.

(3,5 val.) **2.** Considere a sucessão definida por recorrência por

$$u_1 = 2\,, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n}{(n+1)(2n+1)}\,, \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

(a) Mostre por indução que $u_n = 4^n/(2n)!$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(b) Use o resultado da alínea (a) para calcular, ou justificar que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

(i) $v_n = (-1)^n(2 - u_n)$ (ii) $w_n = (2n)!u_n - n^6$

(3,0 val.) **3.** Calcule cada um dos seguintes limites, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \arccos(x+1)\, \cos\big(\ln(x^2) - 1\big)$, b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \big(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\big)^{\operatorname{sen} x}$

(5,0 val.) **4.** Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k - 6\ln(2x^2+1) & x < 1 \\ 3\cos\big(\pi/x\big) & x \geqslant 1 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

(a) Determine a constante k sabendo que f é contínua em $x = 1$.

(b) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 1$.

(c) Calcule, se existirem, as derivadas laterais de f em $x = 1$ e esboce o gráfico de f no intervalo $]0{,}9\,,\ 1{,}1[$.

(d) Determine os intervalos de monotonia de f. Sugestão: que valores toma π/x?

(e) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\sup f$ e, se existir, $\max f$.

(3,0 val.) **5.** Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função injectiva e 4 vezes diferenciável, e seja $p(x) = 1 - 3x + x^4$ o polinómio de Taylor de ordem 4 no ponto $a = 0$ da função g.

(a) Calcule a derivada da função inversa g^{-1} no ponto $p(0)$.

(b) Mostre que g é estritamente decrescente.

(c) Mostre que $3x + g(x)$ tem um mínimo local em $a = 0$.

(2,5 val.) **6.** Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]0, a[$, para algum $a > 1$, tal que

$$h(1/n) = (-1)^n, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que h não é diferenciável em 0 e que para qualquer $\varepsilon > 0$ a função derivada h' não é majorada nem minorada no intervalo $]0, \varepsilon[$.