Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 7 de Novembro de 2015 - 8h00m
Cursos: MEC, LEGM

(2,0 val.) **Problema 1** Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 12| \leq 2x^2\}$ e seja B o domínio da função $f(x) = \ln(x+5)$.

(a) Mostre que $A \cap B = \left]-5,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[$.

(b) Determine, se existirem em $\widetilde{\mathbb{R}}$, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do conjunto $A \cap B$.

(1,5 val.) **Problema 2** Considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + x_n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Mostre por indução que $x_n < 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(4,5 val.) **Problema 3** Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x+2}{(x-3)\,\mathrm{sen}^2\big(1/(x-3)\big)}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n! + n^4 + 4^n}{(n-1)!(2n + \ln n)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/3} \big(\cos(6x)\big)^{1/(1-2\cos x)}$

(3,0 val.) **Problema 4** Calcule as derivadas das seguintes funções e simplifique o resultado *apenas* da alínea (a). Sugestão para (c): use as alíneas (a) e (b).

(a) $(2x^2 - 2x + 1)e^{2x}$ (b) $\mathrm{arcsen}(2x-3)$

(c) $\Big(2\,\mathrm{arcsen}^2(2x-3) - 2\,\mathrm{arcsen}(2x-3) + 1\Big)e^{2\,\mathrm{arcsen}(2x-3)}$

(7,0 val.) **Problema 5** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{xe^{-x}}$.

(a) Calcule os limites de f em $+\infty$ e em $-\infty$.

(b) Mostre que a recta tangente ao gráfico de f é vertical em $x = 0$.

(c) Mostre que f é crescente em $\left]-\infty,1\right]$ e decrescente em $\left[1,+\infty\right[$.

(d) Sabendo que $f''(x) = \frac{1}{9}\big(1 - 2x^{-1} - 2x^{-2}\big)\sqrt[3]{xe^{-x}}$, estude a concavidade de f.

(e) Esboce o gráfico de f.

(f) Seja g a função inversa da restrição de f ao intervalo $\left[1,+\infty\right[$. Determine o domínio e o contradomínio de g e esboce o seu gráfico.

(g) Calcule $g'\big(f(2)\big)$.

(2,0 val.) **Problema 6** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f'(x) \neq 1$ para todo o $x > 0$. Mostre que, se existir um $x > 0$ tal que $f(x) - f(0) < x$, então para todo o $x > 0$ temos $f(x) - f(0) < x$.