Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 13 de Abril de 2013 - 9h00m

Curso: LEIC-A

Problema 1 (2 val.) Considere a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$.

(a) Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Seja F o prolongamento por continuidade de f à origem. Calcule $F'(0)$ usando a definição de derivada.

Problema 2 (3 val.) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to-\infty}\left(\operatorname{arcsen}(e^x)\operatorname{sen} x\right)$ (b) $\lim_{x\to 1/2}\dfrac{\cos\pi x}{e^{2x}-e}$ (c) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^3+2x+\cos x}}{(x+1)(\ln x+\sqrt{x})}$

Problema 3 (2 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $\arctan(x^4)$ (b) $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

Problema 4 (6.5 val.) Considere a função $f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

(a) Calcule $f(0^-)$ e $f(0^+)$.

(b) Determine as assímptotas oblíquas de f.

(c) Determine os intervalos de monotonia de f. Sugestão: $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2+x+2)$.

(d) Estude a concavidade de f.

(e) Esboce o gráfico de f.

(f) Seja g a inversa da restrição de f ao intervalo $]-\infty, 0[$. Qual o domínio de g?

(g) Mostre que $g(1) = -1$, e calcule $g'(1)$.

(h) Use uma aproximação linear para estimar o valor de $g(1{,}01)$ (se não conseguiu fazer a alínea (g) use o valor $g'(1) = 4$).

Problema 5 (1.5 val.) Considere a sucessão (x_n) definida por recorrência por

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \tfrac{1}{4}(3x_n^3 + 1)$$

Mostre por indução que $x_n < 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Problema 6 (3 val.) Considere as funções f, g definidas por $f(x) = e^x$ e $g(x) = 4 - x^2$.

(a) Esboce, na mesma figura, os gráficos de f e de g.

(b) Mostre que a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos dois zeros.

(c) Mostre que a equação $f(x) = g(x)$ não pode ter mais do que dois zeros.

Problema 7 (2 val.) Seja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto a de acumulação de D_f, com derivada $f'(a) > 0$. Mostre que existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(a)$ para qualquer $x \in [a, a+\delta[\cap D_f$.