Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 11 de Novembro de 2017 - 11h00m
Cursos: MEAmbi, MEBiol

(3,0 val.) **Problema 1** Considere o conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{2x+1} < 1\}$.

a) Identifique o conjunto C.
b) Determine os pontos isolados e os pontos de acumulação de $C \cup \mathbb{Z}$ (em que $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros).
c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
  (i) Qualquer sucessão (u_n) crescente de termos em C converge com limite $\lim u_n < 0$.
  (ii) Qualquer função f contínua em C tem máximo e mínimo em C.

(2,0 val.) **Problema 2** Prove, por indução, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

(3,0 val.) **Problema 3** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n^3 + 5\sqrt{n}}{n^3 + 2n - 1}$ $(n \in \mathbb{N})$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} \arctan\big(x^4 \cos x\big)$

(7,0 val.) **Problema 4** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{e}^{-x}, & \text{se } x > 0, \\ \operatorname{arcsen}\Big(\dfrac{x}{x-1}\Big), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Pode assumir que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.
b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
c) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$ e indique os extremos e os intervalos de monotonia de f.
d) Decida se f é diferenciável na origem e em caso afirmativo determine $f'(0)$.
e) Determine o contradomínio, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de f (se existirem).
f) Seja g a função inversa da restrição de f ao intervalo $[0, 2]$. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto e^{-1}.

(3,0 val.) **Problema 5** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{3 + \operatorname{sen} x}}$ b) $\dfrac{\cos(2 + \operatorname{argsenh} x)}{\sqrt{1 + x^2}}$

(2,0 val.) **Problema 6** Seja $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) = 2x\}$ não é majorado. Prove que, se existir $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi'(x)$, então $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi'(x) = 2$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 12 de Novembro de 2016 - 12h00m
Cursos: MEAmbi, MEBiol

Instruções

- Apresente todos os cálculos que efectuar e justifique as suas respostas.
- Numere as páginas do caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões são resolvidas.
- Identifique com o nome e número a primeira página do seu caderno de respostas e junte esta folha.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras ou telemóveis.

pergunta	página(s)	classificação	cotação
1.			3,0 val.
2.			2,0 val.
3.			3,0 val.
4.			7,0 val.
5.			3,0 val.
6.			2,0 val.
total			

Nome: ____

Número: ____________________

Boa Sorte!