Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

Época de Recurso - 30 de Janeiro de 2017 - 8h00m
Cursos: MEAmbi, MEBiol

Apresente todos os cálculos que efectuar.

TESTE 1

(4,0 val.) **Problema 1** Considere as funções:

$$f(x) = \ln\big(3 - |x-4|\big) \qquad g(x) = \sqrt{(x-4)^2(9-x^2)}$$

(a) Mostre que $D_f \cap D_g =]1,3] \cup \{4\}$.
(b) Calcule, se existirem em $\widetilde{\mathbb{R}}$, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo de $D_f \cap D_g$.
(c) Determine quais os pontos interiores e os pontos de acumulação de $D_f \cap D_g$ e de $D_f \cap D_g \cap \mathbb{Q}$.

(6,0 val.) **Problema 2** Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{\ln\big(\cos^4(\pi x)+1\big)}{\cos^4(\pi x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \operatorname{sen}(x)\big(\arctan(x) + \tfrac{\pi}{2}\big)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+5x+4}{x^3+3x+4}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x+3)^{5/x^2}$

(6,5 val.) **Problema 3** Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\arccos\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right) - 4(x-2) & x \leqslant 2 \\ -3^x + a(x-2) + b & x > 2 \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

(a) Use a definição de derivada para calcular a derivada à direita de f no ponto 2.
(b) Calcule a derivada de f para $x \neq 2$.
(c) Calcule a e b de modo a f ser diferenciável no ponto 2.
(d) Justifique que f é injectiva. Sugestão: mostre que $f'(x) < \pi - 4$ para $x < 2$.
(e) Mostre que $f^{-1}(0) = 2$ e calcule $(f^{-1})'(0)$.

(1,5 val.) **Problema 4** Esboce o gráfico duma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as 5 condições seguintes:

(1) contínua;
(2) par;
(3) diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ com derivada à direita 1 na origem;
(4) côncava em $]0,2[$ e convexa em $]2,+\infty[$;
(5) com assímptota oblíqua à direita $y = x - 3$.

(2,0 val.) **Problema 5** Dada uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mostre que existe o limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(\operatorname{sen} x)$ se e só se existir um $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo o $x \in [-1,1]$ temos $f(x) = c$.

TESTE 2

(4,5 val.) **Problema 6** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $(x+3)\,\mathrm{sen}(x+2)$ (b) $\dfrac{6+x^2}{(x+2)(x^2+1)}$ (c) $\cos^3(x)\,\mathrm{sen}^8(x)$

(3,0 val.) **Problema 7**

(a) Calcule: $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^{5/3} x}\,\mathrm{d}x$

(b) Determine a natureza da série: $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+2)\ln^{5/3} n}$

(2,5 val.) **Problema 8** Considere a região R do plano limitada pelas curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 2x - 1$.

(a) Esboce a região R e calcule a sua área.
(b) Determine a, b e c de modo à área de R, integrando na variável y, ser dada por

$$\int_a^b \Big(\sqrt{y+4} - (-\sqrt{y+4}\,)\Big)\,\mathrm{d}y + \int_b^c \Big(\sqrt{y+4} - \tfrac{1}{2}(y+1)\Big)\,\mathrm{d}y$$

(2,5 val.) **Problema 9** Considere a série de potências: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{(\sqrt{n}+n)3^{n+4}}$

(a) Mostre que a série é simplesmente convergente em $x = -2$.
(b) Determine, justificando, o raio de convergência da série. Sugestão: use a alínea (a).

(2,5 val.) **Problema 10** Seja f a função definida por: $f(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{sen}\,x}^{x^2} \mathrm{sen}(3+t^5)\,\mathrm{d}t$

(a) Calcule $f'(x)$.
(b) Use a aproximação pela recta tangente para mostrar que $f(0{,}01) \approx -0{,}0014$

(1,5 val.) **Problema 11** Determine a sucessão das somas parciais, justifique a convergência e calcule a soma da série:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)$$

(1,5 val.) **Problema 12** Seja f uma função racional tal que $f^{(n)}(2) = n!(-1)^n/3^{2n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$. Determine f. Sugestão: escreva a série de Taylor de f e calcule a sua soma.

(2,0 val.) **Problema 13** (a) Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $x > -1$, temos

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(b) Mostre que, para $x > 0$, temos: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(c) Conclua que, para qualquer $x \in [0,1]$, temos $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$