Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

Época de Recurso - 25 de Janeiro de 2016
Cursos: MEC, LEGM
1° Teste

(2,5 val.) **Problema 1** Seja D o domínio da função f dada por $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+4}{x+3}\right)$, seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x+3| \le \frac{3}{2}\right\}$ e seja $C = A \cap D$.

(a) Identifique A e D e mostre que $C = \left]-3, -\frac{3}{2}\right]$.
(b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o supremo de C, o mínimo de C, e o máximo de $C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

(3,0 val.) **Problema 2** Considere a sucessão (a_n) dada por

$$\begin{cases} a_1 = \frac{3}{4}, \\ a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n (a_n + 2), \quad \text{se } n \ge 1. \end{cases}$$

(a) Mostre por indução que $0 < a_n < 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente e decida se (a_n) é ou não uma sucessão convergente.

(3,0 val.) **Problema 3** Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

(a) $u_n = \dfrac{3^n + \sqrt{n}}{n! + 2^{n+1}}$ (b) $v_n = e^{-n^4}\big(2\,\mathrm{sen}(n) + \cos(n)\big)$

(3,0 val.) **Problema 4** Calcule cada um dos seguintes limites, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (2x+3)^3 \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{(2x+3)^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(4x - 2x^2 - 1\right)^{2/\ln^2 x}$

(6,5 val.) **Problema 5** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \arctan\left(2/\sqrt{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{2\pi}{(x-2)^2} + e^{2x}, & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em 0.
(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(c) Calcule $f'(x)$ para $x \ne 0$, calcule $f'_e(0)$ e $f'_d(0)$ e mostre que f não é diferenciável em 0.
(d) Mostre que f é decrescente em $[0, +\infty[$ e crescente em $]-\infty, 0]$, e determine os extremos de f, indicando se são relativos ou absolutos.
(e) Sabendo que f'' nunca se anula, esboce o gráfico de f indicando a concavidade (não precisa de calcular f'').
(f) Justifique que f é injectiva no intervalo $I =]-\infty, 0]$ e, sendo g a função inversa da restrição de f a I, calcule $g'\big(f(-1)\big)$.

(2,0 val.) **Problema 6** Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e seja $a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{x\in]a-\varepsilon, a[\cap D}{\exists} \ f(x) > f(a)$$

Assumindo que existe a derivada à esquerda $f'_e(a)$, mostre que $f'_e(a) \le 0$.

Cálculo Diferencial e Integral I

Época de Recurso - 25 de Janeiro de 2016

Cursos: MEC, LEGM

2° Teste

(2,0 val.) **Problema 7** Calcule a área da região R entre as parábolas $y = x^2 + x - 2$ e $y = 4 - 3x - x^2$.

(4,0 val.) **Problema 8** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $(2x+3)e^{x^2+3x-4}$ (b) $\dfrac{2}{x^2+2x-3}$ (c) $\operatorname{sen}(2x+1)\cos(x-1)$ (d) $(1/x^3)\operatorname{sen}(1/x)$

(2,5 val.) **Problema 9** Considere a função

$$\phi(x) = \int_{2x+1}^{1} \frac{\ln(1+t^6)}{t^2-4}\,dt$$

(a) Determine o domínio D de ϕ.
(b) Justifique que ϕ é diferenciável em D e calcule a sua derivada.

(3,0 val.) **Problema 10** Determine o domínio de convergência da seguinte série de potências:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k+3}\,(2x+1)^k}{4^{k+2}}$$

(3,5 val.) **Problema 11** Indique se cada uma das seguintes série é simplesmente convergente, absolutamente convergente ou divergente, e calcule a soma duma delas.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left((0{,}3)^k + 5^{-k}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3+\sqrt{k}}{2+k+k^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3\ln k+2}$

(3,0 val.) **Problema 12** Considere a função $f(x) = \ln(2x+3)$.

(a) Desenvolva f em série de potências de x, indicando o maior intervalo aberto em que a série converge.
(b) Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 de f na origem.
(c) Use a série de Taylor de f para calcular $\ln\left(\frac{3{,}1}{3}\right)$ com um erro inferior a 0,001.

(2,0 val.) **Problema 13** Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e seja

$$F(x) = \int_0^1 g(xt)\,dt$$

Mostre que

$$F'(x) = \int_0^1 t g'(xt)\,dt$$

Sugestão: comece por fazer uma substituição.