**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste - 14 de Janeiro de 2012 - 8h00m
Cursos: LEMat , LEAN , MEBiol , MEQ , MEAmbi

**Apresente todos os cálculos que efectuar.**
**Não é necessário simplificar os resultados.**

**Problema 1** (2 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$(a)\ x\cosh(2x)$ $\qquad$ $(b)\ \dfrac{1}{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{1+\arctan^2 x}$

**Problema 2** (3 val.) Seja

$$F(x) = e^x + \int_1^x \frac{e^t}{t-2}\,dt$$

(a) Calcule o domínio de $F$.
(b) Verifique que $x = 1$ é um ponto crítico de $F$.
(c) Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 de $F$ no ponto $x = 1$.
(d) Classifique o ponto crítico $x = 1$.

**Problema 3** (2 val.) Considere a região $R$ delimitada pelas curvas

$$y = 2x^2 - 2 \quad \text{e} \quad y = x^2 - 1$$

(a) Esboce a região $R$ no plano;
(b) Calcule a área da região $R$.

**Problema 4** (3 val.) Determine os seguintes limites (em que $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$). Não precisa de apresentar os cálculos.

$(a)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+\ln n}+2n+1}{(n+e^{-n})(1+5/n)}$ $\qquad$ $(b)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n+4n^3}$

$(c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\arctan x - \pi/2}$ $\qquad$ $(d)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4}$ $\qquad$ $(e)\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x}$

**Problema 5** (2 val.)

(a) Determine o polinómio de Taylor de ordem 4 na origem da função

$$f(x) = \cos x + e^{x^2/2}$$

(b) Calcule, justificando, o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + e^{x^2/2} - 2}{x^4}$$

**Problema 6** (1.5 val.) Seja $f : [\,0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Escreva as somas de Darboux superior e inferior de $f$ no intervalo $[\,0,1\,]$ correspondente à partição do intervalo em 3 intervalos iguais (pode usar o facto de $f$ ser crescente).
(b) O que pode concluir pela alínea (a) sobre o integral de $f$ em $[\,0,1\,]$?

**Problema 7** (2 val.) Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\ ,$$

(a) Calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{0} \left(e^{-x^2} + e^{x}\right) dx$$

(b) Determine, justificando, a natureza da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

**Problema 8** (2 val.) Considere a seguinte função, definida por uma série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{8^n n}$$

(a) Determine o raio de convergência da série;
(b) Determine para que valores de $x$ a série converge simplesmente;
(c) Calcule $f'''(0)$;
(d) Escreva $f'(x)$ como um quociente de polinómios.

**Problema 9** (1.5 val.) Para cada $k \geq 1$ mostre que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função $k$ vezes diferenciável e $p(x)$ é o polinómio de Taylor de ordem $k$ de $f$ na origem, então

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^k} = 0\ .$$

Sugestão: Para $k = 1$ isto é a definição de derivada.