Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 12 de Novembro de 2011 - 12h30m
Cursos: LEMat , LEAN , MEBiol , MEQ , MEAmbi

Apresente todos os cálculos que efectuar.
Não é necessário simplificar os resultados.

Problema 1 (4.5 val.) Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & x \leq 0 \\ \cos x + bx & x > 0 \end{cases}$$

onde b é uma constante.

(a) Verifique que f é contínua em $x = 0$
(b) Calcule a constante b sabendo que f é diferenciável em $x = 0$
(c) Calcule

$$\lim_{x\to 0} e^{f(x)} f\left(\frac{1-e^x}{x}\right)$$

(d) Mostre que f é crescente.
(e) Calcule a derivada de $f^{-1}(y)$ no ponto $y = 1$
(f) Estude a concavidade de f no intervalo $]-\infty, \pi]$ e esboce o seu gráfico nesse intervalo.

Problema 2 (2 val.) Calcule os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{x+\pi} + \frac{e^{\operatorname{arcsen} x} - 1}{\operatorname{arcsen} x}\right) \qquad (b)\ \lim_{x\to \pi/2} \cos(x)\operatorname{sen}(\tan x)$$

Problema 3 (2 val.) Seja

$$f(x) = \frac{(x-1)\cos(\pi x)}{x^4+1} + 3$$

(a) Use a definição de derivada para calcular $f'(1)$;
(b) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$;
(c) Use a derivada para calcular aproximadamente $f(0.98)$.

Problema 4 (2 val.) Calcule as seguintes derivadas:

$$(a)\ \left(\arctan(x^3)\right)^5 \qquad (b)\ x^{x \ln x}$$

Problema 5 (2 val.) A tabela seguinte representa alguns valores de duas funções $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis:

x	f	g	f'	g'
0	4	2	2	3
2	7	0	5	7

(a) Calcule a derivada de $f(\operatorname{sen}(\pi x))$ em $x = 2$;
(b) Calcule a derivada de $f \circ g$ em $x = 0$;
(c) Assumindo que f é duas vezes diferenciável, mostre que existe um ponto $c \in]0, 2[$ tal que $f''(c) = -3/2$.

Problema 6 (1.5 val.) Considere a sucessão (x_n) definida por recorrência por

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{(n+2)(1-x_n)} \end{cases}$$

Mostre por indução que $x_n = n/(n + 1)$.

Problema 7 (2 val.) Considere a equação $e^{-x} = \ln x$.

(a) Mostre que a equação tem pelo menos uma solução.
(b) Mostre que a equação tem exactamente uma solução.

Problema 8 (2 val.) Seja $x_n = \frac{2n+1}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Seja $\varepsilon > 0$. Resolva a equação $|x_n - 2| < \varepsilon$ em ordem a n. Sugestão: comece por simplificar $|x_n - 2|$.
(b) Mostre usando a definição de limite que a sucessão (x_n) converge para 2.

Problema 9 (2 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período P.

(a) Mostre que se f é contínua então f tem máximo e mínimo.
(b) Mostre que se f não é constante então a função $g(x) = f(1/x)$ não tem limite na origem.