Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Exame - 25 de Janeiro de 2010 - 13h00m
Curso: LEIC-A

Apresente todos os cálculos que efectuar.
Não é necessário simplificar os resultados.

Problema 1 (1.5 val.) Considere a função $f(x) = \frac{\sqrt{3-|x-2|}}{x^2-1}$.

(a) Escreva o domínio Df de f como uma união de intervalos.
(b) Determine, se existirem, o supremo e o ínfimo do conjunto Df.

Problema 2 (1.5 val.) Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-2x+1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

Problema 3 (1.5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $\dfrac{e^x \cos x}{x+1}$ (b) $\left(\log(x^2)\right)^2$ (c) $x\displaystyle\int_x^1 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$

Problema 4 (1.5 val.) Seja $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3$.

(a) Determine os intervalos de monotonia de f.
(b) Estude a concavidade de f.
(c) Esboce o gráfico de f.

Problema 5 (2 val.) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{x^2+2\sqrt{x}}{x}$ (b) $\dfrac{1}{x}\,\dfrac{1}{1+(\log x)^2}$ (substituição) (c) $(x+2)\cos x$ (por partes)

(d) Use uma substituição adequada para mostrar que

$$\int_1^2 e^{1/x^3}\,\frac{dx}{x^2} = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{u^3}\,du$$

Problema 6 (1.5 val.) Calcule a área da região R do primeiro quadrante limitada pelas curvas $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ e $x = 2$.

Problema 7 (1.5 val.)

(a) Determine o polinómio de Taylor $P_2(x)$ de ordem 2 da função $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 10$.
(b) Use a alínea (a) para calcular aproximadamente $\sqrt{98}$.
(c) Mostre que o erro cometido em (b) é inferior a $\frac{1}{2} \cdot 98^{-5/2}$ (em módulo).

Virar a página $\longrightarrow$

Problema 8 (2 val.) Calcule a soma das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k}}{3^{2k}}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

(c) Sabendo que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcule a soma da série

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{3}{k^2} + \frac{1}{2^k} \right)$$

Problema 9 (1.5 val.) Determine a série de Taylor em $a = 0$ das seguintes funções:

(a) $\operatorname{sen}(x^3)$ (b) $x\cos(x^4)$

(c) Use as alíneas (a) e (b) para calcular o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3) - x^3}{x\cos(x^4) - x}$$

Problema 10 (2 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável *estritamente decrescente*. Na tabela seguinte estão indicados alguns valores de f e f':

x	1	2	3	4	5	6
f	8	6	5	2	0	-3
f'	-4	-1	0	-3	-2	-1

(a) Calcule justificando $\displaystyle\lim_{x\to 2} x\, f(x)$
(b) Seja g a função inversa de f. Calcule a derivada de g no ponto 2.
(c) Determine os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[\,2, 6\,]$
(d) Mostre que

$$\int_2^5 f(x)^2\, dx \geq 29$$

Problema 11 (1.5 val.) Seja $f(x) = e^x - 4x$.

(a) Mostre que f tem pelo menos um zero no intervalo $[\,0, 1\,]$.
(b) Mostre que f não pode ter mais que 2 zeros em $\mathbb{R}$.
(c) Mostre que f tem exactamente 2 zeros em $\mathbb{R}$. Justifique.

Problema 12 (2 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1.$$

(a) Dê um exemplo duma função f nestas condições cujo contradomínio seja o intervalo $[\,-1, 2\,]$. Pode simplesmente esboçar o gráfico.
(b) Será possível que o contradomínio de f seja $]-2, 2[$? Justifique.