**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Cálculo Diferencial e Integral I

1º Exame - 11 de Janeiro de 2010 - 13h00m
Curso: LEIC-A

**Apresente todos os cálculos que efectuar.**
**Não é necessário simplificar os resultados.**

**Problema 1** (1.5 val.) Considere a função $f(x) = \sqrt{2-x} + \log(|x|-1)$.

(a) Escreva o domínio de $f$, $Df$, como uma união de intervalos.
(b) Determine, se existirem, o supremo e o ínfimo de $Df$.

**Problema 2** (1.5 val.) Calcule os seguintes limites:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x^2)}{3x^4} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x^2)}{3x^4} \qquad \text{(c)} \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

**Problema 3** (1.5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$\text{(a) } f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(\cos x)} \qquad \text{(b) } g(x) = \big(\cos x\big)^{\arctan x} \qquad \text{(c) } h(x) = \int_1^{x^3} \operatorname{arcsen}(t^2)\, dt$$

Sugestão para (b): calcule $\big(\log g(x)\big)'$.

**Problema 4** (2 val.) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{1}{x(1+x^2)}$

(b) $\dfrac{\arctan x}{x^2}$ (comece por primitivar por partes e use (a))

(c) $2x^3\sqrt{x^2-1}$ (use a substituição $t = x^2-1$)

**Problema 5** (1.5 val.) Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(a) Determine o polinómio de Taylor $P_3(x)$ de ordem 3 de $f$ no ponto $a = \frac{\pi}{6}$.
(b) Estude o sinal de $f(x) - P_3(x)$ no intervalo $[0, \pi]$.

**Problema 6** (4 val.) Seja $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log x + \frac{2}{x} - 3 & x > 1 \\ a + x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

(a) Sabendo que $f$ é contínua em $x = 1$ determine o valor de $a$.
(b) Determine os intervalos de monotonia de $f$.
(c) Estude a concavidade de $f$ em $]1, +\infty[$.
(d) Mostre que $f$ não tem nenhuma assímptota.
(e) Esboce o gráfico de $f$ tendo especial cuidado ao pé de $x = 1$.
(f) Qual o contradomínio de $f$?
(g) Escreva um integral (ou integrais) que permita calcular a área da região entre o gráfico de $f$ e o eixo dos $xx$ para $0 \le x \le e$. Não precisa de calcular o integral.

**Virar a página** $\longrightarrow$

**Problema 7** (1.5 val.) Considere a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)2^k}$.

(a) Determine o raio de convergência $R$ da série.
(b) Estude a convergência da série para $x = R$.
(c) Estude a convergência da série para $x = -R$.

**Problema 8** (2 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Na tabela seguinte estão indicados alguns valores de $f$ e $f'$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 1 | 5 | 3 | 4 | 6 |
| $f'$ | 1 | 3 | 2 | -1 | 1 |

(a) Calcule a derivada de $f(f(x))$ no ponto $x = 3$.
(b) Mostre que existe um ponto $c \in ]1, 2[$ tal que $f'(c) = -2$
(c) Assumindo que $f'$ é contínua, mostre que $f'$ tem pelo menos dois zeros em $]1, 2[$.
(d) Poderá $f = 1$ ser o mínimo absoluto da função $f$? Justifique brevemente a sua resposta.

**Problema 9** (1.5 val.) Considere a sucessão

$$x_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt \;, \quad n \geq 0$$

(a) Use primitivação por partes para mostrar que $x_n = n\, x_{n-1}$. Pode usar sem demonstrar que
$$\lim_{t\to+\infty} t^n e^{-t} = 0$$
(b) Mostre por indução que $x_n = n!$.

**Problema 10** (2 val.) Seja

$$f(x) = \int_0^1 e^{xt^2}\, dx$$

(a) Mostre que a série de Taylor de $f$ em torno da origem é
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k+1)k!}$$
Sugestão: comece por escrever a série de Taylor de $g(t) = e^{xt^2}$ tratando $x$ como uma constante.
(b) Mostre que
$$f'(x) = \int_0^1 t^2 e^{xt^2}\, dt$$

**Problema 11** (1 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Mostre que o contradomínio de $f$ contem o intervalo $]-1, 1[$. Justifique cuidadosamente a sua resposta.