

PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 7

**Exercício 1.** *Averigue se os seguintes limites existem e calcule-os (se existirem).*

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3 + x^3 y^2 - 5}{2 - xy} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x + y \log y \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$$

$$(4) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \log(xy) \quad (\text{sugestão: } y = e^{-\frac{1}{x^2}})$$

**Exercício 2.** *Seja*

$$f(x, y) = \frac{2x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$$

- (1) *Qual o domínio  $D$  de  $f$ ? Qual a aderência de  $D$ ?*
- (2) *Justifique que  $f$  é contínua em  $D$ .*
- (3) *Averigue se os seguintes limites existem. Em caso afirmativo calcule-os.*

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$$

*Sugestão: poderá ser útil fazer a mudança de variável  $X = x$ ,  $Y = y - 1$ .*

- (4)  *$f$  pode ser prolongada por continuidade a  $\mathbb{R}^2$ ? Justifique a sua resposta.*

**Exercício 3.** *Seja  $f(x, y) = xy + x^4$ . Mostre que  $f$*

- (1) *é um infinitésimo de ordem 1*
- (2) *não é um infinitésimo de ordem 2*
- (3) *não é um infinitésimo de ordem 3*

**Exercício 4.** *Determine, justificando, os pontos de continuidade das funções*

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } P \neq 0 \\ 1 & \text{se } P = 0 \end{cases} \quad (2) g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } P \neq 0 \\ 0 & \text{se } P = 0 \end{cases}$$

**Exercício 5.** *Calcule o comprimento do gráfico das seguintes funções:*

$$(1) f(x) = x^{\frac{3}{2}}, x \in [1, 2] \quad (2) f(x) = \cosh x, x \in [0, 1]$$

$$(3) f(x) = e^x, x \in [0, 1] \quad \text{sugestão: substituição } x = \frac{1}{2} \log(t^2 - 1)$$

$$(4) f(x) = x^2, x \in [-1, 2] \quad (5) f(x) = \int_2^{e^x} \sqrt{\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t^2}} dt, x \in [1, 2]$$