PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 10

Exercício 1. *Calcule as derivadas* $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$

(1) $r = e^{u+v+w}$, $u = yz$, $v = xz$, $w = xy$
(2) $r = uvw - u^2 - v^2 - w^2$, $u = y + z$, $v = x + z$, $w = x + y$
(3) $r = \sin\left(\frac{p}{q}\right)$, $p = \sqrt{xy^2z^3}$, $q = \sqrt{x + 2y + 3z}$
(4) $r = \frac{p}{q} + \frac{q}{s} + \frac{s}{p}$, $p = e^{yz}$, $q = e^{xz}$, $s = e^{xy}$

Exercício 2. *Calcule a derivada direccional das seguintes funções no ponto e na direcção indicadas:*

(1) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, $P = (2,1)$, $\vec{v} = (1,1)$
(2) $f(x,y) = e^x \sin y$, $P = (0, \frac{\pi}{4})$, $\vec{v} = (1,-1)$
(3) $f(x,y) = \sin x \cos y$, $P = (\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$, $\vec{v} = (4,-3)$
(4) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $P = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (1,1,1)$
(5) $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $P = (4,0,-3)$, $\vec{v} = (0,1,-1)$

Exercício 3. *Areia cai continuamente numa superfície formando um cone de areia. Quando o cone tem uma altura de* 50*cm e raio da base* 20*cm, a altura do cone aumenta à taxa de* 4*cm/min e o raio da base aumenta à taxa de* 7*cm/min. Calcule a taxa de variação do volume do cone.*

Exercício 4. *Um bloco de gelo rectangular derrete ao sol. A sua altura decresce a uma taxa de* 2*cm/hora e a sua largura e o seu comprimento decrescem ambos à taxa de* 3*cm/hora. Calcule a taxa de variação do volume quando a altura é igual a* 5*cm e a largura e o comprimento são ambos iguais a* 10*cm.*

Exercício 5. *Seja* $f(x,y)$ *uma função de classe* C^1 *e seja* $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. *Mostre que*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$$

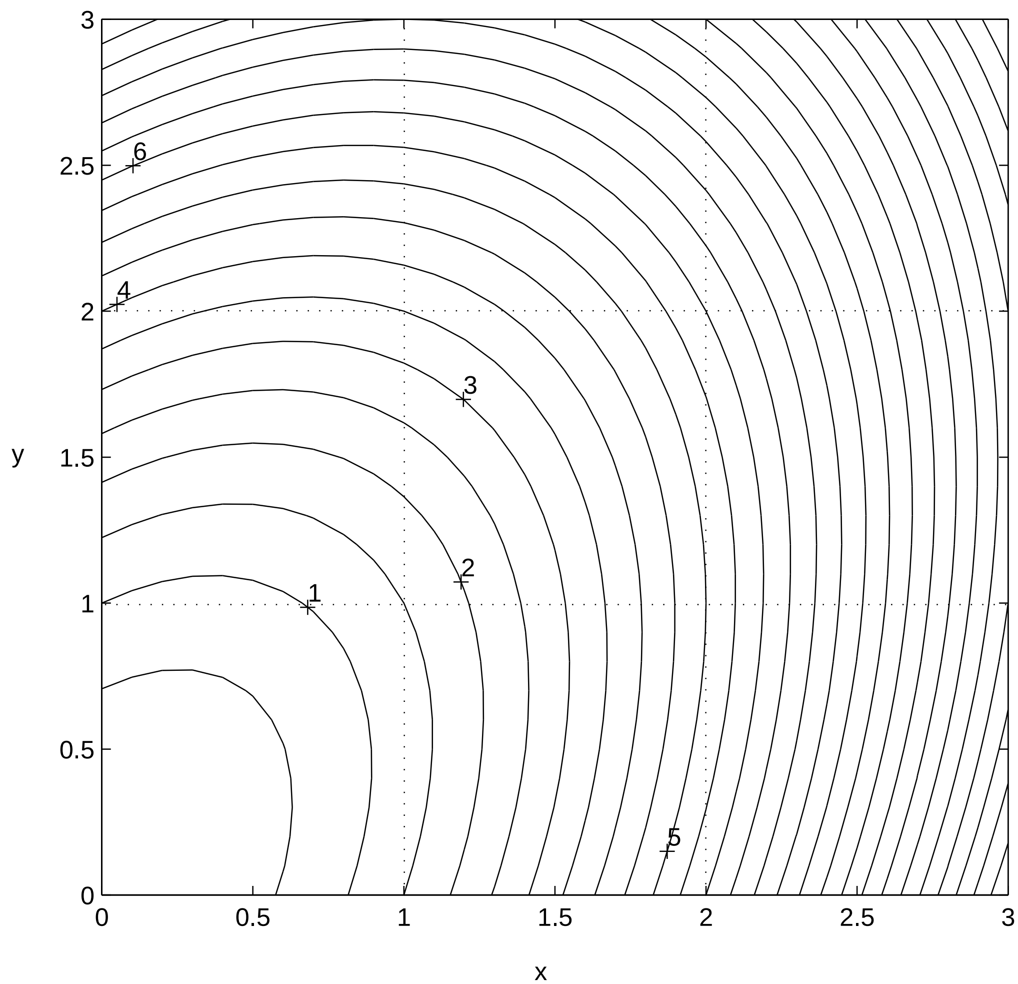
Exercício 6. *Seja* $f(x,y)$ *uma função de classe* C^2 *e seja* $g(u,v) = f(2u+v, u-v)$. *Mostre que*

$$5\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

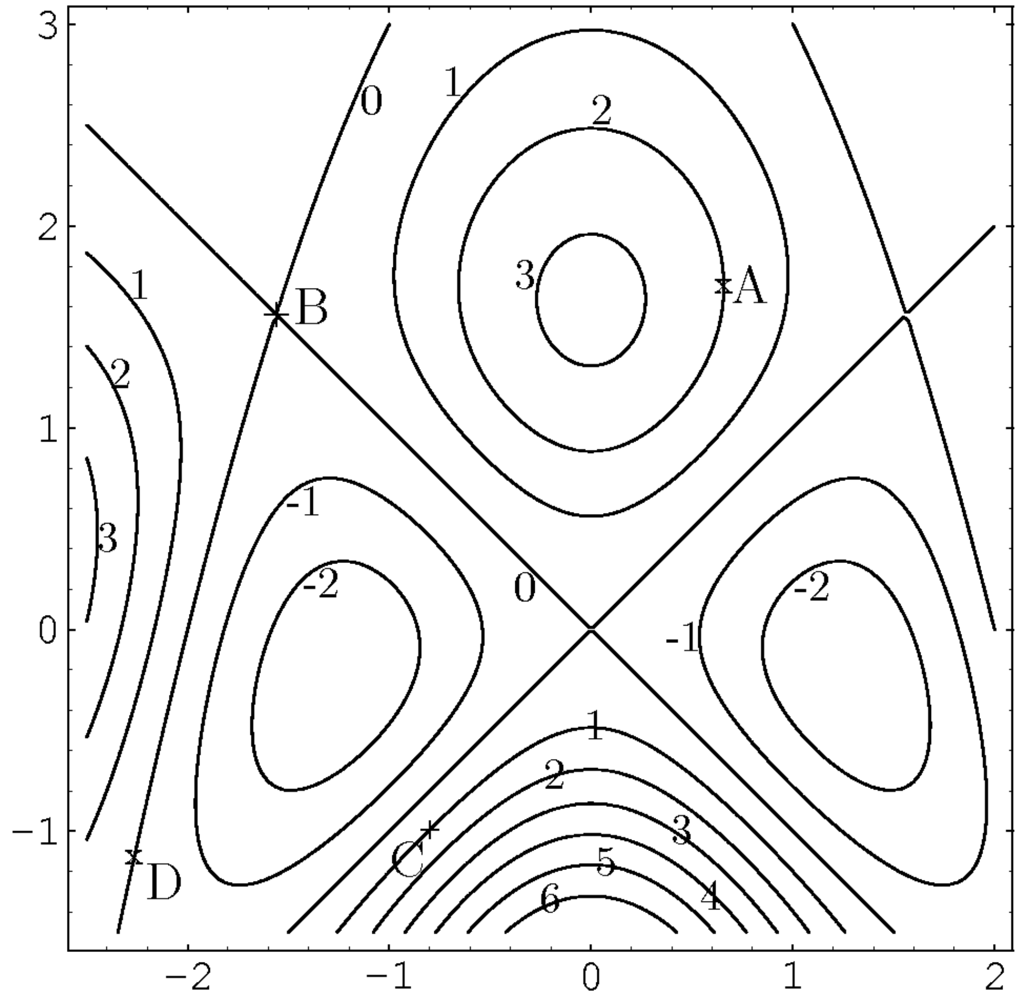
Exercício 7. *Seja* F *uma função de classe* C^2, $u(x,y) = F(x^2 - y^2, y^2)$. *Sabendo que as derivadas cruzadas de segunda ordem da função* F *são nulas mostre que*

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Exercício 8. *A figura representa as curvas de nível duma função f. Estime os valores de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ nos pontos $(2,1)$ e $(2,2)$.*



Exercício 9. *A figura seguinte representa as curvas de nível duma certa função diferenciável $f(x, y)$ definida num quadrado*



(1) *Indique na figura a posição aproximada do ponto em que f atinge o seu valor máximo.*

(2) *Para cada derivada indicada escolha o seu valor entre a lista de valores abaixo:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(C) = \_\_\_\_\_\_ \qquad (\ \vec{u} = (-1, 1)\ )$$

$-7.7 \qquad -3.1 \qquad -1.2 \qquad 0 \qquad 1.2 \qquad 3.1 \qquad 7.7$